



第3章 导数及其应用

第1节 导数的运算及几何意义



题型上分练

1. B 【解析】对于 A, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1-\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = -f'(1)$;

对于 B, 由导数的定义可得 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x} = f'(1)$;

对于 C, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1-\Delta x)}{-2\Delta x} = -f'(1)$;

对于 D, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-\Delta x)}{2\Delta x} = \frac{1}{2}f'(1)$. 故选 B.

易错警示 此类题型经常进行细节变动, 如选项 B 的

$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{\Delta x}$ 也可写成 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-\Delta x)}{\Delta x}$,

$2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x) - f(1)}{2\Delta x}$ 等, 解决此类问题, 核心方法就是理解导数定义的本质.

2. A 【解析】求导得 $f'(x) = -e^x + 2f'(1) \cdot x$, 令 $x=1$, 得 $f'(1) = -e^1 + 2f'(1) \cdot 1 = -e + 2f'(1)$ (提示: 原式中含有 $f'(1)$, 所以赋值 $x=1$), 解得 $f'(1) = e$, 因此 $f(x) = -e^x + e \cdot x^2$, 令 $x=1$, 得 $f(1) = -e^1 + e \cdot 1^2 = -e + e = 0$. 故选 A.

3. C 【解析】因为 $f(x^2+1) = f^2(x) + f^2(1) + x^2$, 且 $f(1) = 1$, 令 $x=1$, 得 $f(2) = f^2(1) + f^2(1) + 1 = 3$.

对 $f(x^2+1) = f^2(x) + f^2(1) + x^2$ 两边同时求导, 得 $2xf'(x^2+1) = 2f'(x)f(x) + 2x$, 即 $xf'(x^2+1) = f'(x)f(x) + x$.

令 $x=1$, 得 $f'(2) = f'(1)f(1) + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$. 令 $x=2$, 得

$2f'(5) = f'(2)f(2) + 2 = \frac{3}{2} \times 3 + 2 = \frac{13}{2}$, 故 $f'(5) = \frac{13}{4}$.

故选 C.

4. D 【解析】 $y' = \ln x + 1$, 故所求切线斜率 $k = \ln 1 + 1 = 1$, 切点坐标为 $(1, 0)$, 所以曲线 $y = x \ln x$ 在 $x=1$ 处的切线方程为 $y = x - 1$. 该切线交 x 轴于点 $(1, 0)$, 交 y 轴于点 $(0, -1)$, 因此, 曲线 $y = x \ln x$ 在 $x=1$ 处的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积为 $\frac{1}{2} \times 1^2 = \frac{1}{2}$. 故选 D.

5. D 【解析】因为 $f(x)$ 为奇函数, 当 $x < 0$ 时, $f(x) = x + \sin x + 1$, 所以当 $x > 0$ 时, $f(x) = -f(-x) = -[-x + \sin(-x) + 1] = x + \sin x - 1$ (提示: 先求出 $x > 0$ 时函数 $f(x)$ 的解析式), 则当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 1 + \cos x$, 可得 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$, $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处的切线方程是 $y - \frac{\pi}{2} = 1 \times \left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, 即 $x - y = 0$. 故选 D.

6. 0 【解析】由题意得 $f'(x) = \frac{-(1+x)\sin x - \cos x}{(1+x)^2}$, 则 $f'(0) =$



$-1, g'(x) = ae^x + (ax+1)e^x$, 则 $g'(0) = a+1$.

因为曲线 $y=f(x) = \frac{\cos x}{1+x}$ 与曲线 $y=g(x) = (ax+1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线互相垂直, 所以 $f'(0) \cdot g'(0) = -1$,
即 $-(a+1) = -1$, 解得 $a=0$.

7. $\left(-1, \frac{4}{e}\right)$ 【解析】由题意得 $y' = [(x-1)^2 + 2(x-1)]e^x = (x^2-1)e^x$, 设 $A(x_0, y_0)$,

所以曲线 $y=(x-1)^2e^x$ 在点 A 处的切线的斜率为 $(x_0^2-1)e^{x_0}$,
由题意可知 $(x_0^2-1)e^{x_0} = 0$ (提示: 若两直线斜率存在且平行, 则斜率相等), 解得 $x_0=1$ 或 $x_0=-1$,

当 $x_0=1$ 时, $y_0=0$, 此时切点在 x 轴上, 切线与 x 轴重合, 不符合题意; 当 $x_0=-1$ 时, $y_0 = \frac{4}{e}$.

综上, $A\left(-1, \frac{4}{e}\right)$.

8. A 【解析】设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 由 $y = \frac{4}{x}$, 得 $y' = -\frac{4}{x^2}$,

$\therefore$ 曲线 C 在点 A 处的切线方程为 $y-y_1 = -\frac{4}{x_1^2}(x-x_1)$, 把

$P(1, 2)$ 代入切线方程, 得 $2-y_1 = -\frac{4}{x_1^2}(1-x_1)$ ①, 又 x_1, y_1 满

足 $y_1 = \frac{4}{x_1}$, $\therefore x_1y_1 = 4$. ①式两边同乘 $x_1^2y_1$, 化简得 $2x_1+y_1-8=$

0 , 同理可得曲线 C 在点 B 处的切线方程为 $2x_2+y_2-8=0$.

$\therefore A, B$ 都满足直线 $2x+y-8=0$, $\therefore$ 直线 AB 的方程为 $2x+y-8=0$. 故选 A.

9. $y=0$ 或 $y = \frac{27}{4}x - \frac{27}{4}$ (写出其中一条即可) 【解析】 $\because f'(x) = 3x^2$, 设切点坐标为 (x_0, x_0^3) ,

则切线方程为 $y-x_0^3 = 3x_0^2(x-x_0)$, 即 $y = 3x_0^2x - 2x_0^3$.

因为该切线过点 $(1, 0)$, 所以 $3x_0^2 - 2x_0^3 = 0$, 解得 $x_0=0$ 或 $x_0 = \frac{3}{2}$, 所以切线方程为 $y=0$ 或 $y = \frac{27}{4}x - \frac{27}{4}$.

10. 2 【解析】设 $f(x) = e^x + 1$, 则 $f(0) = 2$, 又 $f'(x) = e^x$, 所以 $f'(0) = 1$, 则切线方程为 $y=x+2$, 设 $g(x) = \ln(x+1) + a$, 则

$g'(x) = \frac{1}{x+1}$, 因为直线 $y=x+2$ 也是曲线 $y=g(x)$ 的切线, 所

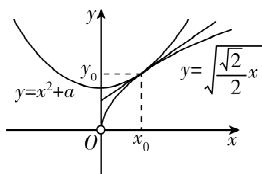
以令 $\frac{1}{x+1} = 1$, 解得 $x=0$, 所以曲线 $y=g(x)$ 与直线 $y=x+2$ 的

切点坐标为 $(0, 2)$, 所以 $g(0) = a = 2$.

11. $\frac{3}{8}$ 【解析】由题意可知, 两抛物线 $y=x^2+a$ 与 $y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ 只可能在第一象限相切.

设两个抛物线相切于点 (x_0, y_0) , 抛物线 $y=x^2+a$ 在该点处的切线的斜率为 $2x_0$,

抛物线 $y^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x$ 在第一象限的图





象为函数 $y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$ 在第一象限的图象, 函数 $y = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$ 的图象在该点处的切线的斜率为 $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{x_0}}$, 所以有 $2x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{x_0}}$, 解得 $x_0 = 2^{-\frac{3}{2}}$, $y_0 = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}} \times 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$, 所以切点坐标为 $(2^{-\frac{3}{2}}, \frac{1}{2})$, 代入 $y = x^2 + a$, 解得 $a = \frac{3}{8}$.

12. D 【解析】设切点坐标为 $(x_0, x_0 e^{x_0})$, $y' = e^x + x e^x = (1+x)e^x$, 所以切线斜率 $k = (1+x_0)e^{x_0}$, 则切线方程为 $y - x_0 e^{x_0} = (1+x_0)e^{x_0} \cdot (x - x_0)$,

又 $(a, 0)$ 在切线上, 所以 $-x_0 e^{x_0} = (1+x_0)e^{x_0}(a - x_0)$.

因为曲线有两条过点 $(a, 0)$ 的切线, 所以方程 $-x e^x = (1+x)e^x \cdot (a-x)$ 有两个解 (提示: 将切线条数问题转化为方程解的个数问题), 整理得 $x^2 - ax - a = 0$, 所以 $\Delta = a^2 + 4a > 0$, 解得 $a < -4$ 或 $a > 0$. 故选 D.

13. BC 【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 6x$, 设 A 点坐标为 $(t, a+1-3t)$, 过点 A 作曲线 $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 的切线, 切点为 $B(x_0, f(x_0))$, 则曲线 $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + a$ 在点 B 处的切线方程为 $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, 即 $y - (x_0^3 - 3x_0^2 + a) = (3x_0^2 - 6x_0)(x - x_0)$, 代入 A 点坐标可得 $(a+1-3t) - (x_0^3 - 3x_0^2 + a) = (3x_0^2 - 6x_0)(t - x_0)$, 整理得 $(x_0 - 1)^2(2x_0 - 3t + 1) = 0$, 解得 $x_0 = 1$ 或 $x_0 = \frac{3t-1}{2}$. 当 $1 = \frac{3t-1}{2}$, 即 $t = 1$ 时, 切线只有 1 条; 当 $1 \neq \frac{3t-1}{2}$, 即 $t \neq 1$ 时, 方程有两个不同实根, 切线可以作 2 条. 故选 BC.



综合提分练

1. B 必刷考点 ⊙ 导数的几何意义

【解析】由题可知, 函数 $y = x^2 - \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

由 $y = x^2 - \ln x$ 得 $y' = 2x - \frac{1}{x}$, 令 $2x - \frac{1}{x} = 1$, 则 $2x^2 - x - 1 = 0$, 解

得 $x = 1$ 或 $x = -\frac{1}{2}$ (舍去) (提示: 注意函数的定义域), 所以

曲线 $y = x^2 - \ln x$ 的所有切线中, 斜率等于 1 的有 1 条.

故选 B.

2. D 必刷考点 ⊙ 导数的运算、基本不等式求和的最小值

【解析】由题意可得 $f'(x) = x - f'(1) + \frac{3}{x}$, 所以 $f'(1) = 1 -$

$f'(1) + 3$, 解得 $f'(1) = 2$, 所以 $f'(x) + a = x + \frac{3}{x} - 2 + a \geq 0$, 即

$-a \leq x + \frac{3}{x} - 2 (x > 0)$.

又 $y = x + \frac{3}{x} - 2 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} - 2 = 2\sqrt{3} - 2$, 当且仅当 $x = \frac{3}{x}$, 即

$x = \sqrt{3}$ 时, 等号成立,

所以 $-a \leq 2\sqrt{3} - 2, a \geq 2 - 2\sqrt{3}$, 故选 D.

3. C 必刷题型 ⊙ 两条切线平行问题

【解析】依题意, $f'(x) = 3x^2 + 3x + a, f'(x_0 + 1) = f'(x_0)$, 即

$3(x_0 + 1)^2 + 3(x_0 + 1) + a = 3x_0^2 + 3x_0 + a$, 解得 $x_0 = -1$, 即曲线 $y =$



$f(x)$ 在 $x=-1$ 和 $x=0$ 处的切线互相平行, 则两条切线的斜率为 $f'(0)=a$, 对应的两个切点坐标为 $(-1, \frac{1}{2}-a)$, $(0, 0)$, 切线方程为 $y - (\frac{1}{2}-a) = a(x+1)$ 和 $y = ax$, 即 $ax - y + \frac{1}{2} = 0$ 和 $ax - y = 0$, 切线 $ax - y + \frac{1}{2} = 0$ 过定点 $A(0, \frac{1}{2})$, 切线 $ax - y = 0$ 过定点 $O(0, 0)$, 所以两平行线之间距离的最大值为 $|OA| = \frac{1}{2}$. 故选 C.

4. A 必刷题型 ① 已知直线与曲线相切求参数的最值

【解析】设直线 $y = x + a$ 与曲线 $y = \ln(x + b)$ 的切点为 (x_0, y_0) .

对 $y = \ln(x + b)$ 求导, 可得 $y' = \frac{1}{x+b}$.

由直线 $y = x + a$ 的斜率为 1 及导数的几何意义可知, $\frac{1}{x_0+b} = 1$,

即 $x_0 = 1 - b$. ①

因为切点 (x_0, y_0) 既在直线 $y = x + a$ 上又在曲线 $y = \ln(x + b)$ 上, 所以 $y_0 = x_0 + a$, 且 $y_0 = \ln(x_0 + b)$, 即 $\ln(x_0 + b) = x_0 + a$. ②

将①代入②, 可得 $\ln(1 - b + b) = 1 - b + a$, 即 $a = b - 1$.

将 $a = b - 1$ 代入 $a^2 + b^2$, 可得 $a^2 + b^2 = (b - 1)^2 + b^2 = 2b^2 - 2b + 1 =$

$2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}$, 所以 $a^2 + b^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$. 故选 A.

5. A 必刷题型 ② 两条切线垂直问题

【解析】 $y = |\ln(x + 1)| = \begin{cases} \ln(x + 1), & x \geq 0, \\ -\ln(x + 1), & -1 < x < 0, \end{cases}$

$$y' = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x \geq 0, \\ -\frac{1}{x+1}, & -1 < x < 0. \end{cases}$$

不妨设 $x_1 < x_2$, 两切线 l_1, l_2 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

当 $0 \leq x_1 < x_2$ 时, $k_1 = \frac{1}{x_1+1}, k_2 = \frac{1}{x_2+1}$, 此时 $k_1 k_2 =$

$\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$, 显然 $k_1 k_2 \neq -1$, 因此 $l_1 \perp l_2$ 不成立, 不符合题意;

当 $-1 < x_1 < x_2 < 0$ 时, $k_1 = -\frac{1}{x_1+1}, k_2 = -\frac{1}{x_2+1}$, 此时 $k_1 k_2 =$

$\frac{1}{(x_1+1)(x_2+1)} > 0$, 显然 $k_1 k_2 \neq -1$, 因此 $l_1 \perp l_2$ 不成立, 不符合题意;

当 $-1 < x_1 < 0 \leq x_2$ 时, $k_1 = -\frac{1}{x_1+1}, k_2 = \frac{1}{x_2+1}$, 此时 $k_1 k_2 = -1$, 即

$x_1 x_2 + x_1 + x_2 = 0$, 变形得 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = -1$. 故选 A.

6. D 必刷题型 ③ 公切线问题

【解析】设 $f(x) = e^x - 2, g(x) = \ln x$, 则 $f'(x) = e^x, g'(x) = \frac{1}{x}$,

设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象的公切线的切点坐标分别为 $(x_1, e^{x_1} - 2), (x_2, \ln x_2)$,

则切线方程分别为 $y - (e^{x_1} - 2) = e^{x_1}(x - x_1)$, 即 $y = e^{x_1}x - e^{x_1}x_1 +$



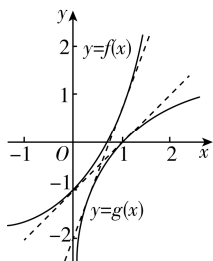
$$e^{x_1} - 2,$$

$$y - \ln x_2 = \frac{1}{x_2}(x - x_2), \text{ 即 } y = \frac{1}{x_2}x - 1 + \ln x_2,$$

$$\text{所以 } e^{x_1} = \frac{1}{x_2} \text{ ①}, -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} - 2 = -1 + \ln x_2 \text{ ②},$$

$$\text{由 ① 式可得 } x_1 = \ln \frac{1}{x_2} = -\ln x_2, \text{ 代入 ② 式可得 } -e^{x_1}x_1 + e^{x_1} - 2 = -1 - x_1,$$

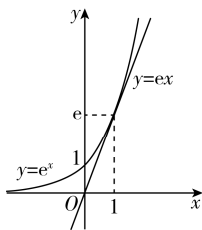
即 $(e^{x_1} - 1)(1 - x_1) = 0$, 解得 $x_1 = 0$ 或 $x_1 = 1$, 所以公切线的斜率为 1 或 e (提示: 先找到临界情况, 数形结合得到参数范围), 如图, 在同一平面直角坐标系内作出 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大致图象, 由图可得 $a \in [1, e]$. 故选 D.



7. C 必刷考点 ① 过某点的切线方程

【解析】因为存在唯一的 $x_0 \in \mathbf{Z}$, 使得 $f(x_0) < g(x_0)$, 即 $e^{x_0} < ax_0$, 所以 $f(x)$ 的图象在 $g(x)$ 图象下方的部分有且只有一个横坐标为整数的点, 先考虑 $f(x) = e^x$ 的图象过点 $(0,0)$ 的切线, 设切点坐标为 (m, e^m) , 且 $f'(x) = e^x$, 所以切线的斜率 $k = e^m$, 所以切线方程为 $y - e^m = e^m(x - m)$, 代入 $(0,0)$, 得 $-e^m = e^m(-m)$, 解得 $m = 1$, 所以直线 $y = ex$ 为曲线 $y = f(x) = e^x$ 的切线, 切点坐标为 $(1, e)$, 如图, 那么当 $a > e$ 时, $x_0 = 1$ 始终满足上述不等式, 所以当 $x = 2$ 时, $f(x)$ 的图象在 $g(x)$ 图象的上方, 所以

$$\begin{cases} f(1) < g(1), \\ f(2) \geq g(2), \end{cases} \text{ 解得 } e < a \leq \frac{e^2}{2}, \text{ 所以实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left(e, \frac{e^2}{2}\right].$$



8. D 必刷题型 ① 多切线问题

【解析】因为 $y = \ln x (x > 0)$, 所以 $y' = \frac{1}{x}$, 则 $y'|_{x=x_1} = \frac{1}{x_1}$,

$$y'|_{x=x_2} = \frac{1}{x_2},$$

依题意可知两条切线的方程分别为 $y = \frac{1}{x_1}(x - x_1) + \ln x_1$, $y =$

$$\frac{1}{x_2}(x - x_2) + \ln x_2,$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = \frac{1}{x_1}(x - x_1) + \ln x_1, \\ y = \frac{1}{x_2}(x - x_2) + \ln x_2 \end{cases} \quad (\text{提示: 两切线过同一个定点, 可据})$$



此联立方程消参), 解得 $x_0 = \frac{x_1 x_2 (\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1}$, 则 $y_0 = \frac{x_2 (\ln x_2 - 1) - x_1 (\ln x_1 - 1)}{x_2 - x_1}$.

因为两条切线的斜率之积为 1, 所以 $\frac{1}{x_1 x_2} = 1$, 所以 $x_1 x_2 = 1$, 则

$$x_2 = \frac{1}{x_1},$$

由 $x_0 = \frac{x_1 x_2 (\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1}$, $y_0 = \frac{x_2 (\ln x_2 - 1) - x_1 (\ln x_1 - 1)}{x_2 - x_1}$ 可得

$$y_0 + 1 = \frac{x_2 (\ln x_2 - 1) - x_1 (\ln x_1 - 1)}{x_2 - x_1} + 1 = \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1}, \text{ 则}$$

$$\frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{\frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{x_2 - x_1}}{\frac{x_1 x_2 (\ln x_2 - \ln x_1)}{x_2 - x_1}} = \frac{x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1}{\ln x_2 - \ln x_1} = \frac{\frac{1}{x_1} \ln \frac{1}{x_1} - x_1 \ln x_1}{\ln \frac{1}{x_1} - \ln x_1} =$$

$$\frac{1+x_1^2}{2x_1} (x_1 > 0),$$

$$\text{所以 } \frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{1+x_1^2}{2x_1} = \frac{\frac{1}{x_1} + x_1}{2} \geq \frac{2\sqrt{\frac{1}{x_1} \cdot x_1}}{2} = 1, \text{ 当且仅当 } \frac{1}{x_1} = x_1,$$

即 $x_1 = 1$ 时取等号, 又因为 $x_1 \neq x_2 = \frac{1}{x_1}$, 所以 $x_1 \neq 1$, 所以

$$\frac{y_0 + 1}{x_0} = \frac{1+x_1^2}{2x_1} > 1, \text{ 故选 D.}$$

9.18 必刷考点 ⊙ 导数的计算、基本不等式

【解析】由题可得 $f'(x) = a[(x-x_1)(x-x_2) + (x-x_1)(x-x_3) + (x-x_2)(x-x_3)]$, 则 $k_2 = f'(x_2) = a(x_2-x_1)(x_2-x_3) = -2$,

所以 $k_1 + 4k_3 = a(x_1-x_2)(x_1-x_3) + 4a(x_3-x_1)(x_3-x_2) = a(x_1-x_2)^2 + 4a(x_3-x_2)^2 + 10$ (提示: $10 = 5a(x_1-x_2)(x_2-x_3)$) $\geq 2\sqrt{4a^2(x_1-x_2)^2(x_3-x_2)^2} + 10 = 4 \times 2 + 10 = 18$, 当且仅当 $a(x_1-x_2)^2 = 4a(x_3-x_2)^2$ 时, 等号成立, 所以 $k_1 + 4k_3$ 的最小值为 18.

真题风向练

10.D 命题点 ⊙ 导数的几何意义

【解析】由 $y = 5x + 8\ln x (x > 0)$ 求导得 $y' = 5 + \frac{8}{x}$, 令 $x = 1$, 得

$y'|_{x=1} = 13$, 即为切线的斜率. 故所求切线方程为 $y - 5 = 13(x - 1)$, 即 $y = 13x - 8$. 故选 D.

第2节 导数在函数中的应用



题型上分练

1.A 【解析】函数 $f(x) = \ln x - 3x + a (a \in \mathbf{R})$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - 3 = \frac{1-3x}{x}$, 由 $f'(x) = \frac{1-3x}{x} > 0$ 可得 $0 < x <$

$\frac{1}{3}$, 故函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, \frac{1}{3})$. 故选 A.

2.A 【解析】令函数 $g(x) = f(x) - 2 = x^3 - \sin x + x$, 其定义域为 $\mathbf{R}$, $g(-x) = (-x)^3 - \sin(-x) + (-x) = -(x^3 - \sin x + x) = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数.



因为 $g'(x) = 3x^2 - \cos x + 1 \geq 0$, 所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

不等式 $f(x) + f(2-3x) < 4$ 等价于 $f(x) - 2 < -[f(2-3x) - 2]$, 即 $g(x) < -g(2-3x) = g(3x-2)$, 则 $x < 3x-2$, 解得 $x > 1$, 故选 A.

3. A 【解析】令 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1, x > 0$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} =$

$\frac{x-1}{x^2}$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 单调递增, 所以 $f\left(\frac{5}{2}\right) >$

$f(1)$, 即 $\ln \frac{5}{2} + \frac{2}{5} - 1 > \ln 1 + 1 - 1 = 0$,

所以 $\ln \frac{5}{2} > \frac{3}{5}$, 即 $b > c$.

令 $g(x) = \ln x - x + 1, x > 0$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$, 当 $x > 1$ 时,

$g'(x) < 0$, 则 $g(x)$ 单调递减, 所以 $g\left(\frac{5}{3}\right) < g(1)$, 即 $\ln \frac{5}{3} -$

$\frac{5}{3} + 1 < \ln 1 - 1 + 1 = 0$, 即 $\ln \frac{5}{3} < \frac{2}{3}$, 因为 $0 = \ln 1 < \ln \frac{5}{3} < \frac{2}{3} <$

$\frac{4}{5}$, 所以 $\ln \frac{3}{5} > -\frac{4}{5}$, 所以 $e^{\ln \frac{3}{5}} > e^{-\frac{4}{5}}$, 即 $\frac{3}{5} > e^{-\frac{4}{5}}$, 即 $c > a$.

综上, $b > c > a$.

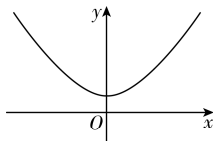
4. C 【解析】由题意可得 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1} - 1 =$

$\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$.

所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

又因为 $f(-x) = \ln\left(\frac{1}{e^{2x}+1}\right) + x = \ln\left(\frac{1+e^{2x}}{e^{2x}}\right) + x = \ln(1+e^{2x}) - x =$

$f(x)$, 所以 $f(x)$ 为偶函数, 作出 $f(x)$ 的大致图象如图所示.



当 $x \in [1, 2]$ 时, 关于 x 的不等式 $f(2x+1) < f(x+a)$ 恒成立, 则

$|2x+1| < |x+a|$ 对 $x \in [1, 2]$ 恒成立, 所以 $|x+a| > 2x+1$, 则 $x+a$

$> 2x+1$ 或 $x+a < -2x-1$, 所以 $a > x+1$ 或 $a < -3x-1$ 对 $x \in [1,$

$2]$ 恒成立, 所以 $a > (x+1)_{\max} = 3$ 或 $a < (-3x-1)_{\min} = -7$, 所以

实数 a 的取值范围为 $(-\infty, -7) \cup (3, +\infty)$, 故选 C.

5. D 【解析】由题意知 $f(x) = f(-x)$, 两边同时求导得 $f'(x) =$

$-f'(-x)$, 即 $f'(x)$ 是奇函数 (提示: 可导偶函数的导函数为奇

函数). 令 $g(x) = f'(x) + e^x + x$, 则 $g(x) = g(-x)$, $f'(x) + e^x + x =$

$f'(-x) + e^{-x} - x = -f'(x) + e^{-x} - x$, 可得 $f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - x$.

令 $h(x) = f'(x) = \frac{1}{2}e^{-x} - \frac{1}{2}e^x - x$, 可得 $h'(x) = -\frac{1}{2}e^{-x} -$

$\frac{1}{2}e^x - 1 = -\frac{1}{2}(e^{-x} + e^x) - 1 \leq -\frac{1}{2} \times 2\sqrt{e^{-x} \cdot e^x} - 1 = -2$, 当且

仅当 $x = 0$ 时, 等号成立,

即函数 $f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减, 又 $f'(x)$ 是定义域为 $\mathbf{R}$ 的奇

函数, 可得 $f'(0) = 0$.



所以当 $x < 0$ 时, $f'(x) > f'(0) = 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) < f'(0) = 0$, $f(x)$ 单调递减,

因为函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $f(x) = f(|x|)$, $f(3x-1) = f(|3x-1|)$,

可知不等式 $f(x) > f(3x-1)$ 等价于 $f(|x|) > f(|3x-1|)$, 即 $|x| < |3x-1|$,

即 $|x|^2 < |3x-1|^2$, 可得 $8x^2 - 6x + 1 > 0$, 解得 $x < \frac{1}{4}$ 或 $x > \frac{1}{2}$, 故

选 D.

6. 【解】 (1) 当 $a = 2$ 时, $f(x) = xe^x - (x+1)^2$, 所以 $f'(x) = e^x + xe^x - 2(x+1) = (x+1)(e^x - 2)$, 所以 $f'(0) = -1$, 又 $f(0) = -1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y+1 = -x$, 即 $x+y+1=0$.

(2) 因为 $f(x) = xe^x - \frac{a}{2}(x+1)^2$, $x \in \mathbf{R}$, 所以 $f'(x) = e^x + xe^x - a(x+1) = (x+1)(e^x - a)$.

当 $a \leq 0$ 时, $e^x - a > 0$, 若 $x > -1$, 则 $f'(x) > 0$, 若 $x < -1$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = -1$ 或 $x = \ln a$.

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f'(x) \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $\ln a > -1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < -1$ 或 $x > \ln a$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $-1 < x < \ln a$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, \ln a)$ 上单调递减.

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $\ln a < -1$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $x < \ln a$ 或 $x > -1$, 令 $f'(x) < 0$, 解得 $\ln a < x < -1$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln a, -1)$ 上单调递减.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a = \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a > \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-1, \ln a)$ 上单调递减;

当 $0 < a < \frac{1}{e}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln a, -1)$ 上单调递减.

7. B 【解析】 要使奇函数 $f(x)$ 是增函数, 则需 $f(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $2a \geq 0$. 当 $x > 0$ 时, $f'(x) = 3x^2 + 2ax + (6-a) \geq 0$ 恒成立, 因为 $2a \geq 0$, $y = 3x^2 + 2ax + (6-a)$ 的图象的对称轴为直线 $x = -\frac{a}{3}$, 此时 $-\frac{a}{3} \leq 0$, 所以只需 $6-a \geq 0$ 即可, 即 $0 \leq a \leq 6$. 故选 B.

8. A 【解析】 因为 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $f'(x) \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立 (易错: 对应导函数小于等于 0 而不是



小于 0).

因为 $f'(x) = \ln x + 1 - 3ax^2$, 所以 $\ln x + 1 - 3ax^2 \leq 0$, 即 $3a \geq \frac{1 + \ln x}{x^2}$ 恒成立.

令 $g(x) = \frac{1 + \ln x}{x^2} (x > 0)$, 则 $g'(x) = \frac{x - 2x(1 + \ln x)}{x^4} = \frac{-1 - 2\ln x}{x^3}$.

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = e^{-\frac{1}{2}}$, 当 $x \in (0, e^{-\frac{1}{2}})$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, e^{-\frac{1}{2}})$ 上单调递增, 在 $(e^{-\frac{1}{2}}, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $g(x)_{\max} = g(e^{-\frac{1}{2}}) = \frac{1 + \ln e^{-\frac{1}{2}}}{e^{-1}} = \frac{e}{2}$, 所以 $3a \geq \frac{e}{2}$, 即 $a \geq$

$\frac{e}{6}$ (提示: 将不等式恒成立问题转化为求函数最值问题).

故选 A.

9. A 【解析】由题知, $f'(x) = 1 - \frac{2a}{x^3}$, 而 $f(x) = x + \frac{a}{x^2}$ 在区间 $[1, 2]$ 上是单调函数, 则 $f'(x) \geq 0$ 或 $f'(x) \leq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立.

关键点

当 $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立时, $1 - \frac{2a}{x^3} \geq 0$ 恒成立, 即 $x^3 \geq$

$2a$ 恒成立, 由幂函数性质可知 $y = x^3$ 在 $[1, 2]$ 上单调递增, 则 $x^3 \in [1, 8]$, 故当 $f'(x) \geq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立时, 问题等价于

$2a \leq (x^3)_{\min} = 1$ 恒成立, 即 $a \leq \frac{1}{2}$;

当 $f'(x) \leq 0$ 在 $[1, 2]$ 上恒成立时, $1 - \frac{2a}{x^3} \leq 0$ 恒成立, 即 $x^3 \leq$

$2a$ 恒成立, 此时 $2a \geq (x^3)_{\max} = 8$, 即 $a \geq 4$.

综上, $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [4, +\infty)$. 故选 A.

10. B 【解析】函数 $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$.

$\because f(x) = \log_a x + \log_{a+1} x$ 是减函数, $\therefore f'(x) = \frac{1}{x \ln a} + \frac{1}{x \ln(a+1)} =$

$\frac{\ln(a+1) + \ln a}{x \ln a \cdot \ln(a+1)} = \frac{\ln(a^2 + a)}{x \ln a \cdot \ln(a+1)} \leq 0$.

$\because a > 0$ 且 $a \neq 1$, $\therefore \ln(a+1) > 0$, 则 $\frac{\ln(a^2 + a)}{\ln a} \leq 0$,

$\because a^2 + a > a$, $\therefore \begin{cases} \ln(a^2 + a) \geq 0, \\ \ln a < 0, \end{cases}$ 解得 $-\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \leq a < 1$,

当 $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ 时, $a^2 + a = 1$, $f'(x) = \frac{\ln(a^2 + a)}{x \ln a \cdot \ln(a+1)} = 0$, 不符

合题意, $\therefore a$ 的取值范围是 $\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2}, 1\right)$. 故选 B.

11. B 【解析】 $\because h(x) = ae^x - \frac{x^2}{2} + x$, $\therefore h'(x) = ae^x - x + 1$, $\therefore h(x)$ 在

$\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 上不单调, $\therefore h'(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 上有变号零点, 即存在

$x_0 \in \left[\frac{3}{2}, 3\right]$, 使得 $h'(x_0) = ae^{x_0} - x_0 + 1 = 0$, 且在 x_0 左右两侧



的函数值异号. 由 $ae^x - x + 1 = 0$ 得 $a = \frac{x-1}{e^x}$.

设 $g(x) = \frac{x-1}{e^x}, x \in \left[\frac{3}{2}, 3\right], \therefore g'(x) = \frac{2-x}{e^x}$,

令 $g'(x) > 0$, 解得 $\frac{3}{2} \leq x < 2$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ 上单调递增;

令 $g'(x) < 0$, 解得 $2 < x \leq 3$,

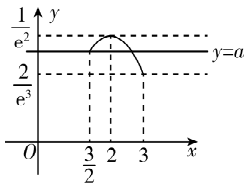
$\therefore g(x)$ 在 $(2, 3]$ 上单调递减.

又 $\because g\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2e^{\frac{3}{2}}}, g(2) = \frac{1}{e^2}, g(3) = \frac{2}{e^3}$,

$\therefore g(2) > g\left(\frac{3}{2}\right) > g(3)$,

作出直线 $y=a, y=g(x)$ 在 $\left[\frac{3}{2}, 3\right]$ 上的大致图象如图, 结合图象可知, 当直线 $y=a$ 位于两条水平虚线之间时满足题意,

即 $g(3) < a < g(2), \therefore \frac{2}{e^3} < a < \frac{1}{e^2}$.



12. D 【解析】极值点的判断由导函数的符号决定, 故需要先利用图象确定导函数在各段的符号.

由题图可得, 当 $-2 \leq x < 0$ 时, $g(x) = xf'(x) > 0$, 故 $f'(x) < 0$;

当 $0 < x < 1$ 时, $g(x) = xf'(x) > 0$, 故 $f'(x) > 0$;

当 $1 < x \leq 2$ 时, $g(x) = xf'(x) < 0$, 故 $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, 2]$ 上单调递减, 故 $f(x)$ 的极大值点为 1, 极小值点为 0, 故选 D.

13. C 【解析】当 $x < 1$ 时, $2-x > 1$, 又 $x > 1$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{x-1}$, 则 $f(2-x)$

$$= \frac{e^{2-x}}{2-x-1} = \frac{e^{2-x}}{1-x},$$

由 $f(2-x) = -f(x)$, 得 $-f(x) = \frac{e^{2-x}}{1-x}$, 故 $f(x) = -\frac{e^{2-x}}{1-x} (x < 1)$ (提示: 先确定 $f(x)$ 的解析式).

$$\text{对 } f(x) = -\frac{e^{2-x}}{1-x} \text{ 求导得 } f'(x) = -\frac{-e^{2-x}(1-x) - e^{2-x}(-1)}{(1-x)^2} = -\frac{e^{2-x} \cdot x}{(1-x)^2}.$$

令 $f'(x) = 0 (x < 1)$, 解得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增;

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减.

故 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 极大值为 $f(0) = -\frac{e^{2-0}}{1-0} = -e^2$. 综

上, 当 $x < 1$ 时, $f(x)$ 的极大值为 $-e^2$. 故选 C.

14. C 【解析】因为不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 $\{x | x < m+1 \text{ 且 } x \neq$



$m\}$, 所以 $f(m)=f(m+1)=0$, 且 $x=m$ 为 $f(x)=0$ 的二重根, 所以 $f(x)=(x-m)^2[x-(m+1)]$, 则 $f'(x)=2(x-m)[x-(m+1)]+(x-m)^2=(x-m)(3x-3m-2)$.

当 $x>\frac{3m+2}{3}$ 或 $x<m$ 时, $f'(x)>0$, 当 $m<x<\frac{3m+2}{3}$ 时, $f'(x)<0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, m)$, $(\frac{3m+2}{3}, +\infty)$ 上单调递增, 在

$(m, \frac{3m+2}{3})$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=\frac{3m+2}{3}$ 处取得极小

值, 即 $f(x)_{\text{极小值}}=f(\frac{3m+2}{3})=(\frac{3m+2}{3}-m)^2[\frac{3m+2}{3}-(m+1)]=$

$-\frac{4}{27}$. 故选 C.

15. **BD** 【解析】由题意, 函数 $f(x)=e^x \cos x$ 在区间 $(0, 2\pi)$ 内有两个极值点 x_1, x_2 , 则 $f'(x)=e^x(-\sin x+\cos x)=0$ 在 $(0, 2\pi)$ 内有两个不等实根, 即 $\sin x=\cos x$, $\tan x=1$, $x \in (0, 2\pi)$, 解得 $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=\frac{5\pi}{4}$, 所以 $x_1+x_2 \neq \pi$, **A** 错误.

$f'(x)=e^x(-\sin x+\cos x)=\sqrt{2}e^x \cos(x+\frac{\pi}{4})$ (提示: 利用辅助

角公式将导函数转化为容易研究符号的函数), $x_1=\frac{\pi}{4}$, $x_2=$

$\frac{5\pi}{4}$, 当 $x \in (\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4})$ 时, $x+\frac{\pi}{4} \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$, $\cos(x+\frac{\pi}{4})<0$,

则 $f'(x)<0$, 所以 $f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上单调递减, **B** 正确.

又 $f(x_1)=e^{\frac{\pi}{4}} \cos \frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}$, $f(x_2)=e^{\frac{5\pi}{4}} \cos \frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}$, 所

以 $f(x_1)+f(x_2)=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\frac{\pi}{4}}-e^{\frac{5\pi}{4}})<0$, **C** 错误.

$|f(x_1)-f(x_2)|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{4}}\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}(e^{\frac{\pi}{4}}+e^{\frac{5\pi}{4}})=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}} \cdot$

$(1+e^\pi)=\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{4^{\frac{1}{4}}}(1+e^\pi)$, 因为 $e^\pi>4$, 所以 $e^{\frac{\pi}{4}}>4^{\frac{1}{4}}>0$, 所以 $\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{4^{\frac{1}{4}}}>$

1 , 故 $\frac{e^{\frac{\pi}{4}}}{4^{\frac{1}{4}}}(1+e^\pi)>1+e^\pi>e^2$, 故 $|f(x_1)-f(x_2)|>e^2$, **D** 正确. 故

选 BD.

16. **BCD** 【解析】由 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 得 $f'(x)=3x^2+2ax+b$, $\therefore$ 函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 在 $x=1$ 处取得极值 10, $\therefore f'(1)=0, f(1)=10$,

$\therefore \begin{cases} 2a+b+3=0, \\ a^2+a+b+1=10, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} a=4, \\ b=-11 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-3, \\ b=3. \end{cases}$

当 $a=-3, b=3$ 时, $f'(x)=3(x-1)^2 \geq 0$, $\therefore f(x)$ 在 $x=1$ 处不

存在极值, 舍去;

当 $a=4, b=-11$ 时, $f'(x)=3x^2+8x-11=(3x+11)(x-1)$,

$\therefore$ 当 $x \in (-\infty, -\frac{11}{3})$ 时, $f'(x)>0$, 当 $x \in (-\frac{11}{3}, 1)$ 时,

$f'(x)<0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, 则 $f(x)$ 在

$(-\infty, -\frac{11}{3})$, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\frac{11}{3}, 1)$ 上单调递



减,满足 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极值10,则 $a=4, b=-11, a+b=-7$,故 **A 错误, B 正确**;

此时 $f(x)$ 一定有两个极值点且存在单调递减区间,故 **C, D 正确**. 故选 BCD.

17. 【解】(1) 当 $a=0$ 时, $f(x)=\ln|x|+b|x|$,定义域为 $\{x|x\neq 0\}$.

$f(-x)=\ln|-x|+b|-x|=f(x)$,则 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x>0$ 时, $f(x)=\ln x+bx$,显然当 $b\geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $b<0$ 时, $f'(x)=\frac{1}{x}+b=\frac{bx+1}{x}$,令 $f'(x)=0$,解得 $x=-\frac{1}{b}$,

当 $0<x<-\frac{1}{b}$ 时, $f'(x)>0$,当 $x>-\frac{1}{b}$ 时, $f'(x)<0$,所以 $f(x)$

在 $(0, -\frac{1}{b})$ 上单调递增,在 $(-\frac{1}{b}, +\infty)$ 上单调递减.

综上,当 $b\geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减,在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $b<0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \frac{1}{b})$ 与 $(0, -\frac{1}{b})$ 上单调递增,在

$(\frac{1}{b}, 0)$ 与 $(-\frac{1}{b}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 当 $a=-1$ 时, $f(x)=\ln(|x|-1)+b|x|$,则 $|x|-1>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>1$,所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1)\cup(1, +\infty)$,易知函数 $f(x)$ 为偶函数.

当 $x>1$ 时,函数 $f(x)=\ln(x-1)+bx$.

当 $b\geq 0$ 时,函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,此时无极值.

当 $b<0$ 时, $f'(x)=\frac{1}{x-1}+b=\frac{bx-b+1}{x-1}$,

令 $f'(x)=0$,解得 $x=\frac{b-1}{b}>1$.

当 $1<x<\frac{b-1}{b}$ 时, $f'(x)>0$;当 $x>\frac{b-1}{b}$ 时, $f'(x)<0$. 所以函数

$f(x)$ 在 $(1, \frac{b-1}{b})$ 上单调递增,在 $(\frac{b-1}{b}, +\infty)$ 上单调递减.

故当 $x>1$ 时,函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(\frac{b-1}{b})=b-1-\ln(-b)$.

因为函数 $f(x)$ 为偶函数,所以当 $x<-1$ 时,函数 $f(x)$ 的极大值为 $f(\frac{1-b}{b})=b-1-\ln(-b)$.

综上,当 $b\geq 0$ 时,函数 $f(x)$ 无极值;当 $b<0$ 时,函数 $f(x)$ 的极大值为 $b-1-\ln(-b)$,无极小值.

18. D 【解析】因为 $f(x)$ 是奇函数,且定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $f(-x)=-f(x)$,

又由 $f(x)=(x+1)h(x)$ 得 $(-x+1)h(-x)=-(x+1)h(x)$ ①,

因为 $g(x)$ 是偶函数,且定义域为 $\mathbf{R}$,所以 $g(-x)=g(x)$,

又由 $g(x)=h(x)-x^3$ 得 $h(-x)+x^3=h(x)-x^3$ ②,

联立①②可得 $h(x)=-x^4+x^3$,

所以 $h'(x)=-4x^3+3x^2=x^2(-4x+3)$,令 $h'(x)=0$,解得 $x=0$

或 $x=\frac{3}{4}$,



当 $x < \frac{3}{4}$ 时, $-4x+3 > 0$, 且 $x^2 \geq 0$, 故 $h'(x) \geq 0$, $h(x)$ 单调递增;

当 $x > \frac{3}{4}$ 时, $-4x+3 < 0$, 故 $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减.

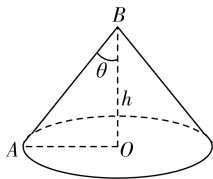
因此, $h(x)$ 在 $x = \frac{3}{4}$ 处取得极大值, 也是最大值, $h\left(\frac{3}{4}\right) = -\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{256}$. 故选 D.

19. $\sqrt[3]{2}$ 【解析】设三个圆锥的高分别为

h_1, h_2, h_3 , 母线与轴线的夹角均为 θ ,

设母线与轴线夹角为 θ 的圆锥的体积

为 V , 高为 h , 侧面积为 S , 如图,



$$V = \frac{1}{3} \pi (h \tan \theta)^2 \cdot h = \frac{\pi}{3} h^3 \tan^2 \theta,$$

$$\text{由 } V_1 = V_2 + V_3, \text{ 得 } h_1^3 = h_2^3 + h_3^3, \text{ 则 } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\cos \theta} \cdot 2\pi h \tan \theta = \pi h^2 \frac{\tan \theta}{\cos \theta}.$$

$$\text{由 } aS_1 = S_2 + S_3 \text{ 可得 } ah_1^2 = h_2^2 + h_3^2, \text{ 则 } a^3 = \frac{a^3 h_1^6}{h_1^6} = \frac{(h_2^2 + h_3^2)^3}{(h_2^3 + h_3^3)^2}, \text{ 即}$$

$$a^3 = \frac{\left[1 + \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^2\right]^3}{\left[1 + \left(\frac{h_3}{h_2}\right)^3\right]^2} \quad \left(\text{提示: 易知分子、分母含有相同元素}\right)$$

$$\frac{h_3}{h_2}, \text{ 则令 } x = \frac{h_3}{h_2} \text{ 构造函数求解}.$$

$$\text{令 } x = \frac{h_3}{h_2}, f(x) = \frac{(1+x^2)^3}{(1+x^3)^2}, x \in (0, +\infty), \text{ 得 } f'(x) = \frac{6x(1+x^2)^2 \cdot (1-x)}{(1+x^3)^3}.$$

$$\text{令 } f'(x) > 0, \text{ 解得 } x \in (0, 1); \text{ 令 } f'(x) < 0, \text{ 解得 } x \in (1, +\infty).$$

故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以

$$f(x)_{\max} = f(1) = 2, \text{ 故 } a^3 \leq 2, \text{ 故 } a_{\max} = \sqrt[3]{2}.$$

20. 2 【解析】由 $e^{2a} + e^{2b} - 2(ae^b + be^a) + a^2 + b^2 = e^{2a} - 2be^a + b^2 + e^{2b} - 2ae^b + a^2 = (e^a - b)^2 + (e^b - a)^2$.

设 $f(x) = e^x - x, x \in \mathbf{R}$, 则 $f'(x) = e^x - 1$, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $f(x)_{\min} = f(0) = 1$, 则 $f(a) \geq 1, f(b) \geq 1$, 即 $e^a - a \geq 1, e^b - b \geq 1$.

$$\text{所以 } (e^a - b)^2 + (e^b - a)^2 \geq \frac{[(e^a - b) + (e^b - a)]^2}{2} = \frac{[(e^a - a) + (e^b - b)]^2}{2} \geq$$

$$\frac{2^2}{2} = 2, \text{ 当且仅当 } a = b = 0 \text{ 时, 等号成立.}$$

21. B 【解析】依题意, $f'(x) = 2x^2 - ax + 1$ 在 $(1, 2)$ 内存在变号

零点. 因为 $x = 0$ 不是 $f'(x)$ 的零点, 所以 $a = 2x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$

内有解, 易知 $y = 2x + \frac{1}{x}$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 所以 $3 < a < \frac{9}{2}$.

故选 B.

22. A 【解析】由已知得 $f(x) = x^3 - ax^2, x \in \mathbf{R}, f'(x) = 3x^2 - 2ax =$

$$3x\left(x - \frac{2a}{3}\right).$$



令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \frac{2a}{3}$. 由题知 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点, 则 $\frac{2a}{3} \neq 0$.

若 $\frac{2a}{3} < 0$, 当 $\frac{2a}{3} < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 则 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点;

若 $\frac{2a}{3} > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 当 $0 < x < \frac{2a}{3}$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

则 $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的极大值点, 不符合题意.

综上, $\frac{2a}{3} < 0$, 即 $a < 0$. 故选 A.

23. C 【解析】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx$, 因为

当 $x = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 取得最大值 2, 所以 $\begin{cases} f(1) = 2, \\ f'(1) = 0, \end{cases}$ 即

$\begin{cases} b+3=2, \\ a+2b=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} b=-1, \\ a=2, \end{cases}$ 所以 $f(x) = 2\ln x - x^2 + 3$.

$f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = \frac{2(1-x)(1+x)}{x}$, $x > 0$, 令 $f'(x) > 0$, 得 $0 < x < 1$,

令 $f'(x) < 0$, 得 $x > 1$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $f(x)_{\max} = f(1) = 2$, 符合题意, 所以 $f(3) = 2\ln 3 - 6$. 故选 C.

24. A 【解析】因为 $f(x) = e^x + ax^2 - e$, 所以 $f'(x) = e^x + 2ax$.

当 $a = 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 单调递增, 不存在最小值, 故舍去.

当 $a < 0$ 时, 若 $x < 0$, 则 $f(x) = e^x + ax^2 - e < ax^2 - e + 1$,

又当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y = ax^2 - e + 1 (a < 0) \rightarrow -\infty$, 所以 $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $f(x)$ 无最小值, 故舍去.

当 $a > 0$ 时, 易知 $f'(x) = e^x + 2ax$ 在定义域 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 且 $f'(0) = 1$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $f'(x)$ 存在唯一零点 x_0 , $e^{x_0} + 2ax_0 = 0$, 且 $x_0 < 0$.

当 $x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$

在 $x = x_0$ 处取得最小值, 即 $f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} + ax_0^2 - e = b$.

又 $a = -\frac{e^{x_0}}{2x_0}$, 所以 $a - b = -\frac{e^{x_0}}{2x_0} - f(x_0) = e^{x_0} \left(\frac{x_0}{2} - \frac{1}{2x_0} - 1 \right) + e$.

令 $g(x) = e^x \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2x} - 1 \right) (x < 0)$,

则 $g'(x) = \frac{1}{2} e^x \left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - 1 \right) = \frac{1}{2x^2} e^x (x-1)^2 (x+1)$,

所以当 $x < -1$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 所以当 $x = -1$ 时, $g(x)$ 取得极小值, 即最小值, 所以当 $x_0 = -1$ 时,

$a - b$ 取得最小值, 此时 $a = \frac{1}{2e}$.

故选 A.



25. 【解】(1) 当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f(x) = \ln x + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2}$, 则 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$, 所以 $f'(1) = \frac{1}{2}$,

因为 $f(1) = 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $x - 2y - 1 = 0$.

(2) 因为 $f(x) = \ln x + \frac{a}{x} - a$, 其中 $x > 0$, 所以 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{a}{x^2} = \frac{x-a}{x^2}$.

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 此时函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极小值.

② 当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = a$. 当 x 变化时, $f'(x)$, $f(x)$ 的变化情况如表所示.

x	$(0, a)$	a	$(a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	$\ln a + 1 - a$	单调递增

所以 $f(x)_{\text{极小值}} = f(a) = \ln a + 1 - a$.

由题意可得 $\ln a + 1 - a < 1 - a^2$, 即 $a^2 + \ln a - a < 0$,

令 $g(a) = a^2 + \ln a - a (a > 0)$, 则 $g(1) = 0$.

因为 $g'(a) = 2a + \frac{1}{a} - 1 \geq 2\sqrt{2} - 1 > 0$, 当 $2a = \frac{1}{a}$, 即 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时

等号成立, 所以函数 $g(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以由 $g(a) < g(1) = 0$, 得 $0 < a < 1$, 所以实数 a 的取值范围是 $(0, 1)$.

26. 【解】(1) 当 $a = 0$ 时, 因为 $f(x) = -\ln x$, 所以 $f'(x) = -\frac{1}{x}$,

$f'(1) = -1$, 又 $f(1) = 0$,

所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -(x - 1)$, 即 $x + y - 1 = 0$.

(2) $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - \ln x$, 定义域为 $(0, +\infty)$, 则 $f'(x) = ax - \frac{1}{x} =$

$\frac{ax^2 - 1}{x}$ (提示: 分子二次项系数含参, 对 a 的符号分类讨论),

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = \frac{ax^2 - 1}{x} = 0$, 解得 $x = \frac{\sqrt{a}}{a}$ 或 $x = -\frac{\sqrt{a}}{a}$ (舍

去), 当 $x \in \left(0, \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递减;

当 $x \in \left(\frac{\sqrt{a}}{a}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\sqrt{a}}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{\sqrt{a}}{a}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(3) 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减, 所



以 $f(x)_{\min} = f(e) = \frac{1}{2}ae^2 - 1 = 1$, 所以 $a = \frac{4}{e^2}$, 不符合题意;

当 $a > 0$ 时, 若 $\frac{\sqrt{a}}{a} \leq 1$, 则 $a \geq 1$, 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f(1) = \frac{1}{2}a - 0 = 1$, 所以 $a = 2$, 符合题意;

若 $\frac{\sqrt{a}}{a} \geq e$, 则 $0 < a \leq \frac{1}{e^2}$, 函数 $f(x)$ 在 $[1, e]$ 上单调递减, 所以

$f(x)_{\min} = f(e) = \frac{1}{2}ae^2 - 1 = 1$, 所以 $a = \frac{4}{e^2}$, 不符合题意;

若 $1 < \frac{\sqrt{a}}{a} < e$, 即 $\frac{1}{e^2} < a < 1$, 函数 $f(x)$ 在 $\left[1, \frac{\sqrt{a}}{a}\right)$ 上单调递减, 在

$\left(\frac{\sqrt{a}}{a}, e\right]$ 上单调递增, 所以 $f(x)_{\min} = f\left(\frac{\sqrt{a}}{a}\right) = \frac{1}{2}a \times \frac{1}{a} -$

$\ln \frac{\sqrt{a}}{a} < \frac{1}{2}$, 不符合题意.

综上, 若函数 $f(x)$ 在区间 $[1, e]$ 上的最小值为 1, 则 $a = 2$.



综合提分练

1. C 必刷考点 利用导数研究函数的单调性

【解析】函数 $f(x) = e^x - e^{-x} - \sin x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f(-x) = e^{-x} - e^x + \sin x = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 是奇函数.

$f'(x) = e^x + e^{-x} - \cos x \geq 2\sqrt{e^x \cdot e^{-x}} - \cos x = 2 - \cos x > 0$ (当且仅当 $x = 0$ 时不等式中等号成立), 所以函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增.

由 $f(\log_2 x) - f(\log_{\frac{1}{2}} x) \leq 2f(1)$, 得 $f(\log_2 x) - f(-\log_2 x) \leq 2f(1)$, 即 $2f(\log_2 x) \leq 2f(1)$, 则 $f(\log_2 x) \leq f(1)$, 因此 $\log_2 x \leq 1$, 解得 $0 < x \leq 2$, 所以所求 x 的取值范围是 $(0, 2]$. 故选 C.

2. D 必刷考点 利用导数研究函数的单调性

【解析】因为 $f'(x) = 1 + \sin x \geq 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又因为 $f(0) = 0$, $f(x)(x+a+b-2) \geq 0$,

所以当 $x < 0$ 时, $f(x) < 0$, $x+a+b-2 \leq 0$, 即 $a+b-2 \leq 0$, 当 $x > 0$ 时, $f(x) > 0$, $x+a+b-2 \geq 0$, 即 $a+b-2 \geq 0$,

所以 $a+b-2 = 0$, $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{a^2+(2-a)^2} = \sqrt{2(a-1)^2+2}$, 因

此当 $a = 1$ 时, $\sqrt{a^2+b^2}$ 取得最小值 $\sqrt{2}$ (另解: $\sqrt{a^2+b^2} \geq$

$\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{2}$, 当且仅当 $a = b = 1$ 时取等号).

3. BCD 必刷考点 利用导数研究函数的单调性、极值、最值

【解析】对于 A, 依题意, $f(-1) = f(0) = 0$, 即 $x = -1$ 和 $x = 0$ 是函数 $f(x) = (x+1)(e^x - x - 1)$ 的零点, A 错误;

对于 B, 当 $x > 0$ 时, 令 $u(x) = e^x - x - 1$, 求导得 $u'(x) = e^x - 1 > 0$, 则函数 $u(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 当 $x \geq 2$ 时, $u(x) \geq e^2 - 3 > 1$, 而 $y = x+1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 值域为 $(1, +\infty)$, 因此当 $x \geq 2$ 时, $f(x) > x+1$, 则 $f(x)$ 无最大值, B 正确;

对于 C, $f'(x) = (x+2)e^x - 2x - 2$, 令 $g(x) = (x+2)e^x - 2x - 2$, 求导得 $g'(x) = (x+3)e^x - 2$,

当 $x > 0$ 时, 令 $h(x) = (x+3)e^x - 2$, 则 $h'(x) = (x+4)e^x > 0$, 即 $g'(x) = h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g'(x) > g'(0) = 1 > 0$, 则 $f'(x) = g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f'(x) > f'(0) = 0$,



因此 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, **C 正确**;

对于 D, 当 $-1 < x < 0$ 时, 令 $\varphi(x) = e^x - \frac{2x+2}{x+2}$, 求导得 $\varphi'(x) =$

突破点

$e^x - \frac{2}{(x+2)^2}$, 显然函数 $\varphi'(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递增, 而

$\varphi'(-1) = \frac{1}{e} - 2 < 0, \varphi'(0) = \frac{1}{2} > 0$, 则存在 $x_0 \in (-1, 0)$, 使得

$\varphi'(x_0) = 0$,

当 $x \in (x_0, 0)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 函数 $\varphi(x)$ 在 $(x_0, 0)$ 上单调递增,

则当 $x_0 < x < 0$ 时, $\varphi(x) < \varphi(0) = 0$, 即当 $x \in (x_0, 0)$ 时, $e^x < \frac{2x+2}{x+2}$, 则 $f'(x) = (x+2)e^x - 2x - 2 < 0$, $f(x)$ 在 $(x_0, 0)$ 上单调递

减, 又 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $f'(0) = 0$, 因此 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的一个极小值点, **D 正确**. 故选 BCD.

4. BCD 必刷题型 ① 函数图象的识别、利用导数判断函数的单调性、函数最值与极值

【解析】 观察四个函数图象, 区别在于极值点与 1 的大小关系, 极值与 0 的大小关系.

$f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = e^x - \frac{a}{x}$, 易知函数 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

令 $g(x) = xe^x (x > 0)$, 则 $g'(x) = e^x(1+x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) > g(0) = 0 < a$,

则 $\exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使得 $g(x_0) = a$, 则 $x_0 e^{x_0} = a$, 即 $f'(x_0) = 0$.

当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) < 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减;

当 $x > x_0$ 时, $f'(x) > 0$, 则函数 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x) \geq f(x_0) = e^{x_0} - a \ln x_0$, 由 $x_0 e^{x_0} = a$, 得 $f(x_0) = e^{x_0} (1 - x_0 \ln x_0)$ (提示: 当函数零点不可直接求出时, 常虚设一个零点, 将其表示出来, 后面转化为研究新的函数问题).

令 $h(x) = x \ln x, x > 0$, 则 $h'(x) = \ln x + 1$,

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调递减;

当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调递增.

又 $h(1) = 0$, 所以当 $x \in (0, 1)$ 时, $h(x) < 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$h(x) > 0$. 所以当 $x_0 \in (0, 1)$ 时, $h(x_0) < 0, f(x_0) = e^{x_0} [1 - h(x_0)] > 0$, 故 **A 错误, B 正确**.

当 $x_0 \in (1, +\infty)$ 时, $h(x_0)$ 与 1 的大小关系不确定, 故 $f(x_0)$ 符号不定, 故 **C, D 均正确**. 故选 BCD.

5. A 必刷题型 ② 利用导数研究函数的最值

【解析】 函数 $f(x) = xe^x - ax - be^x + ab = (e^x - a)(x - b)$,

由 $f(x) = 0$ 得 $x_1 = \ln a, x_2 = b, a > 0$.

当 $b > \ln a$ 时, 由 $f(x) > 0$ 得 $x < \ln a$ 或 $x > b$, 由 $f(x) < 0$ 得 $\ln a < x < b$, 不满足 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = (e^x - a)(x - b) \geq 0$;

当 $b < \ln a$ 时, 由 $f(x) > 0$ 得 $x < b$ 或 $x > \ln a$, 由 $f(x) < 0$ 得 $b < x < \ln a$, 不满足 $\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = (e^x - a)(x - b) \geq 0$;

当 $b = \ln a$ 时, 函数 $f(x) = (e^x - a)(x - b) = (e^x - a)(x - \ln a) \geq 0$ 成立, 符合条件,



因此 $b = \ln a$, 则 $\frac{b-1}{a} = \frac{\ln a - 1}{a}$.

关键点

令 $g(a) = \frac{\ln a - 1}{a}$, $a > 0$, 求导得 $g'(a) = \frac{2 - \ln a}{a^2}$, 由 $g'(a) > 0$ 得

$0 < a < e^2$, 由 $g'(a) < 0$ 得 $a > e^2$,

则函数 $g(a)$ 在 $(0, e^2)$ 上单调递增, 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减,

故 $g(a)_{\max} = g(e^2) = e^{-2}$, 所以 $\frac{b-1}{a}$ 的最大值为 e^{-2} . 故选 A.

6. -1 必刷题型 根据极值情况求参数的值

【解析】由 $f'(x) = 3x^2 + 4ax + a^2$, 又函数 $f(x) = x^3 + 2ax^2 + a^2x$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 则 $f'(1) = 3 + 4a + a^2 = 0$, 解得 $a = -1$ 或 $a = -3$.

当 $a = -1$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 4x + 1 = (3x - 1)(x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$,

则 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = 1$, 当 $x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 则 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处取得极小值, 故 $a = -1$ 符合题意;

当 $a = -3$ 时, $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 3)(x - 1)$, 令 $f'(x) = 0$, 则 $x = 3$ 或 $x = 1$, 当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 则 $x = 1$ 处取得极大值, 故 $a = -3$ 不符合题意.

综上, $a = -1$.

7. 必刷题型 已知函数极值点情况求参数范围、证明不等式

(1) 【解】对 $f(x) = 2e^x - (e^x - a)^2 - 2ax$ 求导得 $f'(x) = 2e^x - 2(e^x - a)e^x - 2a = -2[(e^x)^2 - (a + 1)e^x + a] = -2(e^x - 1)(e^x - a)$

(提示: 可类比二次函数型理解).

① 当 $a \leq 0$ 时, $e^x - a > 0$ 恒成立, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x = 0$,

当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

② 当 $0 < a < 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \ln a$, $\ln a < 0$,

当 $\ln a < x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x < \ln a$ 或 $x > 0$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

③ 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = -2(e^x - 1)^2 \leq 0$ 恒成立, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

④ 当 $a > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \ln a$, $\ln a > 0$,

当 $0 < x < \ln a$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增;

当 $x < 0$ 或 $x > \ln a$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减.

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $(\ln a, 0)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, \ln a)$ 和 $(0, +\infty)$ 上单调递减; 当 $a = 1$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; 当 $a > 1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, \ln a)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 【解】函数 $f(x)$ 区间 $(0, 1)$ 没有极值点等价于 $f'(x)$ 在区间

关键点

$(0, 1)$ 上无变号零点.

因为 $f'(x) = -2(e^x - 1)(e^x - a)$, 由 (1) 知当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 满足题意;

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 0$, $x_2 = \ln a$,

因为 $x_1 = 0 \notin (0, 1)$, 故只需 $x_2 = \ln a \notin (0, 1)$, 则 $\ln a \leq 0$ 或



$\ln a \geq 1$, 解得 $0 < a \leq 1$ 或 $a \geq e$.

综上, a 的取值范围为 $(-\infty, 1] \cup [e, +\infty)$.

(3) 【证明】令 $g(x) = 2 - f(x)$, 则 $g(x) = 2 - 2e^x + (e^x - a)^2 + 2ax = a^2 + 2(x - e^x)a + e^{2x} - 2e^x + 2$ 可视为关于 a 的一元二次函数, 其图象开口向上, 判别式 $\Delta = 4(x - e^x)^2 - 4(e^{2x} - 2e^x + 2) = 4[x^2 - 2e^x(x - 1) - 2]$.

令 $h(x) = x^2 - 2e^x(x - 1) - 2 (x \geq 0)$, 则 $\Delta = 4h(x)$, 对 $h(x)$ 求导得 $h'(x) = 2x - 2e^x(x - 1) - 2e^x = 2x(1 - e^x)$,

因为 $x \geq 0, e^x \geq 1, 1 - e^x \leq 0$, 所以 $h'(x) \leq 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递减, 又 $h(0) = 0$,

所以 $h(x) \leq 0$ 恒成立, 所以 $\Delta = 4h(x) \leq 0$ 恒成立, 所以 $g(x) = 2 - f(x) \geq 0$ 恒成立,

所以当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \leq 2$ 恒成立.

8. 必刷题型 利用导数研究函数的单调性、极值与最值, 证明不等式

(1) 【解】当 $a = 0$ 时, $f(x) = -2x \ln x - x^2, x > 0$,

所以 $f'(x) = -2(\ln x + 1) - 2x = -2(\ln x + 1 + x)$.

令 $g(x) = f'(x)$, 则 $g'(x) = -2\left(\frac{1}{x} + 1\right)$ (提示: 当无法判断导

关键点

数的符号时, 往往需要进行再次求导, 这是利用导数研究函数的单调性、极值与最值的常用方法与技巧).

因为 $x \in [e^{-2}, 1]$, 所以 $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 即 $f'(x)$ 在 $[e^{-2}, 1]$ 上单调递减.

又因为 $f'(e^{-2}) = 2(1 - e^{-2}) > 0, f'(1) = -4 < 0$,

所以 $\exists x_0 \in (e^{-2}, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 0$ (提示: 函数零点存在定理),

所以 $f(x)$ 在 (e^{-2}, x_0) 上单调递增, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递减,

因此 $f(x)$ 在 $[e^{-2}, 1]$ 上的最小值是 $f(e^{-2})$ 与 $f(1)$ 两者中的较小者.

因为 $f(e^{-2}) = 4e^{-2} - e^{-4} = e^{-2}(4 - e^{-2}) > 0, f(1) = -1 < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $[e^{-2}, 1]$ 上的最小值是 -1 .

(2) 【解】由题意可知, $f'(x) = a[e^{x+1} + (x-1)e^{x+1}] - 2(\ln x + 1) - 2x = axe^{x+1} - 2(\ln x + x + 1), x > 0$,

由 $f'(x) = 0$, 解得 $a = \frac{2(\ln x + x + 1)}{xe^{x+1}} = \frac{2(\ln x + x + 1)}{e^{\ln x + x + 1}}$.

易知函数 $y = \ln x + x + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且值域为 $\mathbf{R}$,

令 $t = \ln x + x + 1$, 则 $a = \frac{2t}{e^t}$.

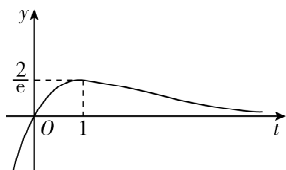
设 $h(t) = \frac{2t}{e^t}$, 则 $h'(t) = \frac{2(1-t)}{e^t}$, 令 $h'(t) = 0$, 则 $t = 1$.

当 $t < 1$ 时, $h'(t) > 0$; 当 $t > 1$ 时, $h'(t) < 0$,

所以 $h(t)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.

又 $h(1) = \frac{2}{e}$, 当 $t \rightarrow -\infty$ 时, $h(t) \rightarrow -\infty$, 当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $h(t) \rightarrow 0$,

所以函数 $h(t)$ 的大致图象如图所示.





当 $a > \frac{2}{e}$ 时, 方程 $h(t) = a$ 无解, 则 $f'(x)$ 无零点, $f(x)$ 没有极值点.

当 $a = \frac{2}{e}$ 时, $f'(x)$ 无变号零点, 此时 $f(x)$ 没有极值点.

当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, 方程 $h(t) = a$ 有两个解, 则 $f'(x)$ 有两个变号零点, $f(x)$ 有两个极值点.

当 $a \leq 0$ 时, 方程 $h(t) = a$ 有一个解, 即 $f'(x)$ 有一个变号零点, $f(x)$ 有一个极值点.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 有一个极值点; 当 $0 < a < \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 有两个极值点; 当 $a \geq \frac{2}{e}$ 时, $f(x)$ 没有极值点.

(3) 【证明】先证明当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, $\frac{\sin x}{x} > \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

设 $n(x) = \frac{\sin x}{x}$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 $n'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$.

记 $p(x) = x \cos x - \sin x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, 则 $p'(x) = \cos x + x(-\sin x) - \cos x = -x \sin x \leq 0$,

所以 $p(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减.

所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $p(x) < p(0) = 0$, 所以 $n'(x) < 0$,

所以 $n(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减, 所以当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时,

$$n(x) > n\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{\pi},$$

即当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ 时, 不等式 $\frac{\sin x}{x} > \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 成立.

由(2)可知, 当函数 $f(x)$ 无极值点时, $a \geq \frac{2}{e}$,

$$\text{所以 } 0 < \frac{1}{2a} \leq \frac{e}{4} < \frac{\pi}{4},$$

在不等式 $\frac{\sin x}{x} > \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ 中, 取 $x = \frac{1}{2a}$, 则有 $2a \sin \frac{1}{2a} > \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, 所以不等式 $a \sin \frac{1}{2a} > \frac{\sqrt{2}}{\pi}$ 成立.

真题风向练

9. AD 命题点 根据导数判断函数的性质

【解析】 $f(x) = 2x^3 - 3ax^2 + 1$, 则 $f'(x) = 6x^2 - 6ax = 6x(x-a)$.

A 选项, 当 $a > 1$ 时, $f'(x)$ 的零点为 $x_1 = 0, x_2 = a$, 则 $x_2 > x_1$. 当 $x < 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $0 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > a$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递增, 在 $(0, a)$ 上单调递减, 在 $(a, +\infty)$ 上单调递增, 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点, $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点, 又 $f(0) = 1 > 0$, $f(a) = 2a^3 - 3a^3 + 1 = 1 - a^3 < 0$, 且 $f(-a) < 0$, $f(2a) > 0$, 所以 $f(x)$ 有三个零点, A 正确; B 选项, 当 $a < 0$ 时, 易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增, 在 $(a, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点,



B 错误;C 选项,若直线 $x=b$ 是曲线 $y=f(x)$ 的对称轴,则 $f(x+b)=f(b-x)$,即 $2(x+b)^3-3a(x+b)^2+1=2(b-x)^3-3a(b-x)^2+1$,即 $x^3+3b^2x=3abx$,不存在 a, b 使等式恒成立,故不存在 a, b ,使得直线 $x=b$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称轴, **C 错误**;
D 选项,若 $(1, f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心,则 $f(1+x)+f(1-x)=2f(1)$,即 $2(1+x)^3-3a(1+x)^2+1+2(1-x)^3-3a(1-x)^2+1=6-6a$,整理得 $(12-6a)x^2-6a+6=6-6a$,解得 $a=2$,所以存在 a ,使得点 $(1, f(1))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的对称中心, **D 正确**. 故选 AD.

快解 C 选项,根据三次函数图象的特点,即三次函数图象没有对称轴,有对称中心,可以直接排除.

D 选项,令 $h(x)=f'(x)=6x^2-6ax$,则 $h'(x)=12x-6a$,令 $h'(x)=0$,得 $x=\frac{a}{2}$,所以曲线 $y=f(x)$ 的对称中心为 $\left(\frac{a}{2}, f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ (提示:三次函数 $y=f(x)$ 图象的对称中心的横坐标为其二次求导后满足 $f''(x)=0$ 的解 x_0),令 $a=2$,则曲线 $y=f(x)$ 的对称中心为 $(1, f(1))$, D 正确.

10. 命题点 ①导数的运算、不等式恒成立求参数范围

(1) 【解】当 $b=0$ 时, $f(x)=\ln \frac{x}{2-x}+ax, x \in (0, 2)$,

$$\text{则 } f'(x)=\frac{2-x}{x} \cdot \left(\frac{x}{2-x}\right)' + a = \frac{2-x}{x} \cdot \frac{2-x-(-1)x}{(2-x)^2} + a = \frac{2}{x(2-x)} + a.$$

..... 2 分

$\because f'(x) \geq 0, \therefore a \geq \frac{2}{x(x-2)}$ 在 $(0, 2)$ 上恒成立.

当 $x \in (0, 2)$ 时, $x(x-2) \in [-1, 0), \therefore \frac{2}{x(x-2)} \in (-\infty, -2],$

$\therefore a \in [-2, +\infty)$, 即 a 的最小值为 -2 5 分

(2) 【证明】 $\because f(x)=\ln \frac{x}{2-x}+ax+b(x-1)^3, x \in (0, 2)$,

$$\therefore f(x+1)=\ln \frac{1+x}{1-x}+ax+a+bx^3, x \in (-1, 1). \text{ 6 分}$$

令 $g(x)=f(x+1)-a=\ln \frac{1+x}{1-x}+ax+bx^3, x \in (-1, 1)$, 则

$$g(-x)=\ln \frac{1-x}{1+x}-ax-bx^3=-\ln \frac{1+x}{1-x}-ax-bx^3=-g(x), \therefore g(x) \text{ 是}$$

定义域为 $(-1, 1)$ 的奇函数,其图象关于坐标原点 O 对称.

..... 9 分

又 $\because f(x)$ 的图象可由 $g(x)$ 的图象向右平移 1 个单位长度,再向上平移 a 个单位长度得到, $\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形. 10 分

一题多解 (2) $f(x)$ 的定义域为 $(0, 2), f(1)=a$ 6 分

$$\text{当 } x \in (-1, 1) \text{ 时, } f(1+x)=\ln \frac{1+x}{1-x}+a(1+x)+bx^3, f(1-x)=$$

$$\ln \frac{1-x}{1+x}+a(1-x)-bx^3,$$

$$\therefore f(1+x)+f(1-x)=\ln \frac{1+x}{1-x}+\ln \frac{1-x}{1+x}+2a=2a, \therefore \text{曲线 } y=f(x)$$

关于点 $(1, a)$ 中心对称,即曲线 $y=f(x)$ 是中心对称图形.

..... 10 分



(3)【解】 $\because f(x) > -2$ 当且仅当 $1 < x < 2, \therefore f(1) = -2 \Rightarrow a = -2$,

$\therefore f(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x + b(x-1)^3 > -2$ 对任意 $x \in (1, 2)$ 恒成立,

$$f'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2-x} - 2 + 3b(x-1)^2 = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} + 3b(x-1)^2 = (x-1)^2 \cdot \left[\frac{2}{x(2-x)} + 3b \right]. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

令 $m(x) = \frac{2}{x(2-x)} + 3b, \therefore$ 必有 $m(1) = 2 + 3b \geq 0 \Rightarrow b \geq -\frac{2}{3}$.

否则若 $b < -\frac{2}{3}$, 则存在 $\delta (1 < \delta < 2)$ 使得当 $x \in (1, \delta)$ 时,

$f'(x) < 0, f(x)$ 在 $(1, \delta)$ 上单调递减, $\therefore f(\delta) < f(1) = -2$.

$\dots\dots\dots 13 \text{ 分}$

当 $b \geq -\frac{2}{3}$ 时, 对任意 $x \in (1, 2), f(x) \geq \ln \frac{x}{2-x} - 2x - \frac{2}{3}(x-1)^3$,

令 $h(x) = \ln \frac{x}{2-x} - 2x - \frac{2}{3}(x-1)^3$, 则 $h'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x(2-x)} - 2(x-1)^2 = 2(x-1)^2 \left[\frac{1}{x(2-x)} - 1 \right] > 0$, 对任意 $x \in (1, 2)$ 恒成立,

$\therefore h(x) > h(1) = -2$, 符合条件. $\dots\dots\dots 16 \text{ 分}$

综上可得 b 的取值范围是 $\left[-\frac{2}{3}, +\infty \right)$. $\dots\dots\dots 17 \text{ 分}$

专题 1 比较大小问题



题型上分练

1. C 【解析】因为 $a = \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2\sqrt{2}}, b = \frac{2}{\ln 2}, c = \frac{3}{\ln 3}$, 所以构造函数

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} (x > 0 \text{ 且 } x \neq 1), \text{ 则 } f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2},$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减; 当 $x \in (1, e)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递增.

$$\text{所以 } b = \frac{2}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 4} = f(4) > f(3) = \frac{3}{\ln 3} = c > f(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{\ln 2\sqrt{2}} = a,$$

可得 $a < c < b$. 故选 C.

2. BCD 【解析】 $\because m + e^m = n + \ln n = 4, \therefore \ln e^m + e^m = n + \ln n = 4$.

设 $f(x) = x + \ln x (x > 0)$, 则 $f(e^m) = f(n) = 4$.

$\because f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0, \therefore f(x) = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

则 $e^m = n$.

$\therefore m + n = m + e^m = 4, ne^n = e^m \cdot e^n = e^{m+n} = e^4$, 故 C, D 正确.

又 $\because f(e) = e + \ln e = e + 1 < 4, f(3) = 3 + \ln 3 > 4, \therefore e < e^m = n < 3$,

$\therefore 1 = \ln e < m < \ln 3 < 2, \therefore m < n$, 故 A 错误.

设 $g(x) = xe^x$, 则 $g'(x) = (x+1)e^x$. 令 $g'(x) = (x+1)e^x > 0$, 得 $x > -1$; 令 $g'(x) = (x+1)e^x < 0$, 得 $x < -1$,

$\therefore g(x) = xe^x$ 在 $(-1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递减, $\therefore 1 < m < 2, \therefore g(m) > g(1)$, 即 $me^m > e, \therefore mn = me^m > e$, 故

B 正确. 故选 BCD.

3. D 【解析】对于 A 和 B, 要比较 $e^{x_2} - e^{x_1}$ 与 $\ln x_2 - \ln x_1$ 的大

关键点



小,只需比较 $e^{x_2} - \ln x_2$ 与 $e^{x_1} - \ln x_1$ 的大小. 设 $f(x) = e^x - \ln x$, 可得 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 令 $h(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 则 $h'(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$, 所以 $f'(x) = e^x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{e} - 2 < 0$, $f'(1) = e - 1 > 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $f'(x_0) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, 1)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上不是单调函数, 所以无法判断 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小, 故 **A, B** 错误.

对于 C 和 D, 要比较 $x_2 e^{x_1}$ 与 $x_1 e^{x_2}$ 的大小, 只需比较 $\frac{e^{x_1}}{x_1}$ 与 $\frac{e^{x_2}}{x_2}$

关键点

的大小. 设 $g(x) = \frac{e^x}{x}$, 可得 $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2} < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 又因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$, 所以 $g(x_1) > g(x_2)$, 即 $\frac{e^{x_1}}{x_1} > \frac{e^{x_2}}{x_2}$, 所以 $x_2 e^{x_1} > x_1 e^{x_2}$, 故 **C** 错误, **D** 正确. 故选 D.

关键点拨 涉及双变量的比较大小问题, 首先将两个变量分离, 再根据式子的特点构造新函数.

4. C 【解析】由题意, $x > 0, y > 0, z > 0$, 由 $e^{x+2} = \frac{2}{x}$ 可得 $xe^x = \frac{2}{e^2}$, 由 $e^{y+3} = \frac{3}{y}$ 可得 $ye^y = \frac{3}{e^3}$, 由 $e^{z+5} = \frac{5}{z}$ 可得 $ze^z = \frac{5}{e^5}$ (关键: 通过变形得到同一结构). 令 $f(t) = te^t (t > 0)$, 则有 $f(x) = \frac{2}{e^2}$, $f(y) = \frac{3}{e^3}$, $f(z) = \frac{5}{e^5}$, 又 $f'(t) = (t+1)e^t$, 当 $t > 0$ 时, $f'(t) > 0$, 所以 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(t) > f(0) = 0$, 因为 $3e^5 > 5e^3$, 所以 $\frac{3}{e^3} > \frac{5}{e^5}$, 又 $2e^3 > 2 \times \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{4} > 27 = 3 \times 3^2 > 3e^2$, 所以 $\frac{2}{e^2} > \frac{3}{e^3} > \frac{5}{e^5}$, 即 $f(x) > f(y) > f(z)$, 由 $f(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增知 $z < y < x$. 故选 C.

5. D 【解析】设 $f(t) = e^t - et, t \in \mathbf{R}$, 则 $f'(t) = e^t - e$, 因为 $f'(t)$ 在定义域上单调递增, 且 $f'(1) = 0$, 所以当 $t > 1$ 时, $f'(t) > 0$, 当 $t < 1$ 时, $f'(t) < 0$, 可得 $f(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减. 又因为 $e^x - e^2 = e(x-2) \neq 0, e^y - e^3 = e(y-3) \neq 0, e^z - e^5 = e(z-5) \neq 0$, 可得 $e^x - ex = e^2 - 2e, e^y - ey = e^3 - 3e, e^z - ez = e^5 - 5e$, 即 $f(x) = f(2), f(y) = f(3), f(z) = f(5)$, 且 $x \neq 2, y \neq 3, z \neq 5$, 可知 $f(x) < f(y) < f(z)$, 且 $x < 1, y < 1, z < 1$, 所以 $z < y < x$. 故选 D.

6. A 【解析】 $\ln \alpha = \ln 2^{\ln 64} = \ln 64 \cdot \ln 2 = 2 \times \ln 8 \cdot \ln 2 = \ln 8 \cdot \ln 4, \ln \beta = \ln 9 \cdot \ln 3, \ln \gamma = \ln 7 \cdot \ln 5$ (关键: 利用取对数转化为同构形式). 构造函数 $f(x) = \ln x \cdot \ln(12-x), 7 \leq x \leq 9$, 则 $f'(x) = \frac{\ln(12-x)}{x} - \frac{\ln x}{12-x} = \frac{(12-x)\ln(12-x) - x \cdot \ln x}{x(12-x)}$, 由 $7 \leq x \leq 9$, 可得 $12-x \in [3, 5]$. 令 $g(x) = x \cdot \ln x, x \geq 3$, 则 $g'(x) = \ln x + 1 > 0$, 则 $g(x)$ 在 $[3, +\infty)$



上单调递增, 又 $x > 12 - x \geq 3$, 则 $g(x) > g(12 - x)$, 即 $(12 - x) \ln(12 - x) < x \cdot \ln x$, 因为 $x(12 - x) > 0$, 所以 $f'(x) < 0$ 在 $[7, 9]$ 上恒成立, 即 $f(x)$ 在 $[7, 9]$ 上单调递减, 则 $f(9) < f(8) < f(7)$, 即 $\ln 9 \cdot \ln 3 < \ln 8 \cdot \ln 4 < \ln 7 \cdot \ln 5$, 则 $\ln \beta < \ln \alpha < \ln \gamma$, 则 $\gamma > \alpha > \beta$. 故选 A.

一题多解 比较 α 与 β : 对 α, β 取自然对数得 $\ln \alpha = \ln 64 \cdot \ln 2 = 6(\ln 2)^2$, $\ln \beta = \ln 9 \cdot \ln 3 = 2(\ln 3)^2$, 即比较 $3(\ln 2)^2$ 与 $(\ln 3)^2$ 的大小, 两边开方, 即比较 $\sqrt{3} \ln 2$ 与 $\ln 3$ 的大小.

方法一(构造函数): 令 $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $x \in (0, e)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 因为 $\sqrt{3} < 2 < e$, 所以 $\frac{\ln \sqrt{3}}{\sqrt{3}} < \frac{\ln 2}{2}$, 即 $2 \ln \sqrt{3} < \sqrt{3} \ln 2$, 所以 $\ln 3 < \sqrt{3} \ln 2$, 所以 $\ln \alpha > \ln \beta$.

方法二(取中间量): 因为 $\frac{\ln 3}{\ln 2} = \log_2 3$, 所以比较 $\sqrt{3} \ln 2$ 与 $\ln 3$ 的大小, 即比较 $\sqrt{3}$ 与 $\log_2 3$ 的大小. 因为 $3^5 = 243 < 256 = 2^8$, 所以 $3 < 2^{\frac{8}{5}}$, 所以 $\log_2 3 < \frac{8}{5}$, 而 $\sqrt{3} > \sqrt{\frac{64}{25}} = \frac{8}{5}$, 所以 $\log_2 3 < \sqrt{3}$, 所以 $\ln 3 < \sqrt{3} \ln 2$, 所以 $\ln \alpha > \ln \beta$. 所以 $\alpha > \beta$.

7. C 【解析】由 $\frac{x_1 f(x_2) - x_2 f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0, x_1, x_2 > 0$, 分子、分母同时

除以 $x_1 x_2$ 得 $x_1 x_2 \cdot \frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{x_2 - x_1} > 0$, 即 $\frac{\frac{f(x_2)}{x_2} - \frac{f(x_1)}{x_1}}{x_2 - x_1} > 0$, 则函

数 $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

则 $a = f(\log_4 11) \log_{11} 4 = \frac{f(\log_4 11)}{\log_4 11} = g(\log_4 11)$,

$b = g(\log_{0.32} 0.128), c = g(1.8)$.

又 $\log_4 11 = \frac{1}{2} \log_4 121 < \frac{1}{4} \log_2 128 = \frac{7}{4} = 1.75 < 1.8$,

$\log_{0.32} 0.128 = \frac{\lg \frac{128}{1000}}{\lg \frac{32}{100}} = \frac{7 \lg 2 - 3}{5 \lg 2 - 2} = \frac{3 - 7 \lg 2}{2 - 5 \lg 2}$, $\log_{0.32} 0.128 - 1.8 =$

$\frac{3 - 7 \lg 2}{2 - 5 \lg 2} - \frac{9}{5} = \frac{10 \lg 2 - 3}{5 \times (2 - 5 \lg 2)} = \frac{\lg 1024 - 3}{5 \times (2 - 5 \lg 2)} > \frac{\lg 1000 - 3}{5 \times (2 - 5 \lg 2)} = 0$,

故 $\log_{0.32} 0.128 > 1.8 > \log_4 11$, 可得 $b > c > a$. 故选 C.

8. C 【解析】由题可得 $\frac{2a+3}{a-2} = \frac{7}{a-2} + 2$, 则 a 为方程 $e^x - \frac{7}{x-2} - 2 =$

破题点

$0 (a > 2)$ 的一个根, 令 $f(x) = e^x - \frac{7}{x-2} - 2 (x > 2)$, 则 $f'(x) = e^x +$

$\frac{7}{(x-2)^2} > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递增, $f\left(\frac{5}{2}\right) = e^{\frac{5}{2}} -$

$\frac{7}{\frac{5}{2}-2} - 2 = e^{\frac{5}{2}} - 16 < 0, f(3) = e^3 - \frac{7}{3-2} - 2 = e^3 - 9 > 0$, 根据函数零



点存在定理可得当 $x > 2$ 时, $f(x)$ 存在唯一的零点 a , 即 $\frac{5}{2} < a < 3$.

同理, b 为方程 $\ln x - \frac{7}{x-2} - 2 = 0 (b > 2)$ 的一个根, 令 $g(x) =$

关键点

$\ln x - \frac{7}{x-2} - 2 (x > 2)$, 则 $g'(x) = \frac{1}{x} + \frac{7}{(x-2)^2} > 0$, 所以 $g(x)$ 在

$(2, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(e^{\frac{5}{2}}) = \ln e^{\frac{5}{2}} - \frac{7}{e^{\frac{5}{2}}-2} - 2 = \frac{1}{2} -$

$\frac{7}{e^{\frac{5}{2}}-2} < 0 (e^{\frac{5}{2}} \approx 12)$, $g(e^3) = 3 - \frac{7}{e^3-2} - 2 = 1 - \frac{7}{e^3-2} > 0$,

根据函数零点存在定理可得当 $x > 2$ 时, $g(x)$ 存在唯一的零点, 即 $e^{\frac{5}{2}} < b < e^3$, 所以 $a < b$.

对于 A, 因为 $a < b$, 所以 $2^a < 2^b$, 故 A 错误;

对于 B, 令 $h(x) = \frac{\ln x}{x} (x > 2)$, 则 $h'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 当 $x > e$ 时,

$h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(e, +\infty)$ 上单调递减, 由于 $e^{\frac{5}{2}} < b < e^3$,

所以 $\frac{\ln b}{b} < \frac{\ln 4}{4}$, 即 $\frac{\ln b}{b} < \frac{\ln 2}{2}$, 则 $b \ln 2 > 2 \ln b$, 故 B 错误;

对于 C, 由于 $\frac{5}{2} < a < 3$, $e^{\frac{5}{2}} < b < e^3$, 显然 $a+b > 9$, 故 C 正确;

对于 D, 由于 $\frac{5}{2} < a < 3$, 则 $(\frac{5}{2} - 2) 2^{\frac{5}{2}-1} < (a-2) 2^{a-1} < (3-2) 2^{3-1}$, 即 $\sqrt{2} < (a-2) 2^{a-1} < 4$,

由于 $e^{\frac{5}{2}} < b < e^3$, 则 $\ln e^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{2} < \ln b + \frac{3}{2} < \ln e^3 + \frac{3}{2}$, 则 $4 < \ln b +$

$\frac{3}{2} < \frac{9}{2}$, 所以 $(a-2) 2^{a-1} < \ln b + \frac{3}{2}$, 故 D 错误. 故选 C.

9. C 【解析】构造 $f(x) = e^x - x - 1, x > 0$, 则 $f'(x) = e^x - 1 > 0$, 可知 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调递增, 则 $f(0.1) > f(0) = 0$, 可得 $e^{0.1} - 1.1 > 0$, 即 $e^{0.1} > 1.1$, 所以 $a > c$.

又因为 $f(\ln 1.1) > f(0) = 0$, 可得 $1.1 - \ln 1.1 - 1 > 0$, 则 $1.1 > 1 + \ln 1.1 = 1 - \ln \frac{10}{11}$, 所以 $c > b$.

综上所述, $a > c > b$. 故选 C.

10. D 【解析】(作商法) $\frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{8}e^{\frac{1}{7}}}{\frac{1}{7}e^{\frac{1}{8}}} = \frac{\frac{1}{8}e^{\frac{1}{7}}}{\frac{1}{7}e^{\frac{1}{8}}}$, 设 $f(x) = \frac{e^x}{x}, 0 < x < 1$,

则 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, \therefore f'(x) < 0, f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

又 $\frac{1}{7} > \frac{1}{8}, \therefore f\left(\frac{1}{7}\right) < f\left(\frac{1}{8}\right), \therefore \frac{a}{b} < 1, a < b$.

(作差法) $a - c = \frac{1}{8} \left(e^{\frac{1}{7}} - \frac{e}{7} \right)$, 设 $g(x) = e^x - ex$,

则 $g'(x) = e^x - e$, 当 $x < 1$ 时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上单调递减, $\therefore g\left(\frac{1}{7}\right) > g(1) = 0, \therefore a - c >$

$0, a > c$.



综上, $c < a < b$. 故选 D.

11. B 【解析】令 $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1$ ($0 < x < 1$), 求导得

$$f'(x) = -\sin x + x,$$

令 $h(x) = -\sin x + x$, 所以 $h'(x) = -\cos x + 1 > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(0) = 0$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以

$f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 所以 $f(x) > f(0) = \cos 0 + \frac{1}{2} \times$

$0^2 - 1 = 0$, 所以 $\cos x + \frac{1}{2}x^2 - 1 > 0$, 所以 $\cos x > -\frac{1}{2}x^2 + 1$, 所以

$$\cos \frac{1}{5} > -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 1 = \frac{49}{50}, \text{ 即 } a > b.$$

令 $g(x) = \ln x - x + 1$ ($x > 1$), 求导得 $g'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$, 所以

$g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x) < g(1) = \ln 1 - 1 +$

$1 = 0$, 所以 $\ln x - x + 1 < 0$, 所以 $\ln x < x - 1$ ($x > 1$), 所以 $\ln \frac{99}{50} <$

$$\frac{99}{50} - 1 = \frac{49}{50}, \text{ 所以 } c < b. \text{ 所以 } c < b < a. \text{ 故选 B.}$$

12. C 【解析】(构造函数法) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\tan x > x$, 所以

$$\tan \frac{1}{4} > \frac{1}{4}, \therefore \frac{\sin \frac{1}{4}}{\cos \frac{1}{4}} > \frac{1}{4}, \text{ 又 } \cos \frac{1}{4} > 0, \therefore \sin \frac{1}{4} > \frac{1}{4} \cos \frac{1}{4},$$

即 $a < b$; 因为 $c = -\ln \frac{3}{4} = -\ln \left(1 - \frac{1}{4}\right)$, 所以 $b - c = \sin \frac{1}{4} +$

$\ln \left(1 - \frac{1}{4}\right)$, 令 $g(x) = \sin x + \ln(1 - x)$ ($0 < x < 1$), 则 $g'(x) =$

$$\cos x - \frac{1}{1-x}, \text{ 令 } h(x) = g'(x), \text{ 则 } h'(x) = -\sin x - \frac{1}{(1-x)^2} < 0,$$

所以 $g'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减 (提示: 通过二阶导数的符号得到一阶导数的单调性), 所以 $g'(x) < g'(0) = 0$, 所以

$g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 所以 $g\left(\frac{1}{4}\right) < g(0) = 0$, 即 $b - c <$

0 , 所以 $b < c$. 综上所述, $a < b < c$. 故选 C.

一题多解 (不等式放缩) 先比较 a, b 的大小: 因为当 $x \in$

$$\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 时, } \tan x > x, \text{ 所以 } \frac{b}{a} = \frac{\sin \frac{1}{4}}{\frac{1}{4} \cos \frac{1}{4}} = 4 \tan \frac{1}{4} > 4 \times \frac{1}{4} =$$

1 , 因为 $\cos \frac{1}{4} > 0$, 所以 $b > a$.

再比较 b, c 的大小: 先证明当 $x > 0$ 时, $\ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$. 令

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \quad (x > 0), \text{ 则 } f'(x) = \frac{x}{(1+x)^2} > 0, \text{ 所以}$$

$f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $f(x) > f(0) = 0$, 即当 $x > 0$

$$\text{时, } \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}, \text{ 所以 } c = \ln \frac{4}{3} = \ln \left(1 + \frac{1}{3}\right) > \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{1}{4},$$

因为当 $x > 0$ 时, $\sin x < x$, 所以 $b = \sin \frac{1}{4} < \frac{1}{4}$, 所以 $c > b$.

综上所述, $a < b < c$. 故选 C.



13. A 【解析】因为 $4^2 < (e^{\frac{3}{2}})^2$, 所以 $4 < e^{\frac{3}{2}}$,

$$\text{所以 } a = \ln 4 < b = \frac{3}{2} = \ln e^{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{令 } h(x) = \sin x + \tan x - 2x, x \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\text{则 } h'(x) = \cos x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

$$= \frac{\cos^3 x - 2\cos^2 x + 1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos^3 x - \cos^2 x) - (\cos^2 x - 1)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x (\cos x - 1) - (\cos x + 1)(\cos x - 1)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x}.$$

$$\text{又 } \cos^2 x - \cos x - 1 = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} < 0,$$

$$\text{所以 } h'(x) = \frac{(\cos x - 1)(\cos^2 x - \cos x - 1)}{\cos^2 x} > 0, \text{ 即 } h(x) = \sin x +$$

$$\tan x - 2x \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ 上单调递增, 则 } h\left(\frac{3}{4}\right) > h(0) = 0, \text{ 即}$$

$$\sin \frac{3}{4} + \tan \frac{3}{4} - \frac{3}{2} > 0, \text{ 所以 } c > b. \text{ 所以 } a < b < c. \text{ 故选 A.}$$

14. B 【解析】当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $f'(x) \cos x + f(x) \sin x > 0$,

$$\text{令函数 } F(x) = \frac{f(x)}{\cos x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 求导得 } F'(x) =$$

关键点

$$\frac{f'(x) \cos x + f(x) \sin x}{\cos^2 x} > 0, \text{ 所以函数 } F(x) \text{ 在 } \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \text{ 上单调}$$

$$\text{递增. 因此 } F\left(\frac{\pi}{6}\right) < F\left(\frac{\pi}{4}\right) < F\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{ 又 } f(x) \text{ 是定义域为 } \mathbf{R}$$

$$\text{的偶函数, 则 } f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right), \text{ 而 } a = \frac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = F\left(\frac{\pi}{6}\right), b =$$

$$\frac{f\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{f\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{1}{2}} = F\left(\frac{\pi}{3}\right), c = \frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = F\left(\frac{\pi}{4}\right), \text{ 所以 } a < c <$$

b. 故选 B.

15. B 【解析】令 $g(x) = e^{2x}f(x)$, 则 $g'(x) = e^{2x}f'(x) + 2e^{2x}f(x) = e^{2x}[f'(x) + 2f(x)]$, 又 $f'(x) + 2f(x) < 0, e^{2x} > 0$, 所以 $g'(x) < 0$, 即 $g(x) = e^{2x}f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减.

因为 $g(-1) = e^{-2}f(-1) > g(0) = f(0) = 1$, 所以 $f(-1) > e^2$, 故 A 错误;

因为 $g(0) = f(0) = 1 > g(1) = e^2f(1)$, 所以 $f(1) < \frac{1}{e^2}$, 故 B 正确;

因为 $g(0) = f(0) = 1 > g\left(\frac{1}{2}\right) = ef\left(\frac{1}{2}\right)$, 所以 $f\left(\frac{1}{2}\right) < \frac{1}{e}$, 故 C 错误;

因为 $g\left(\frac{1}{2}\right) = ef\left(\frac{1}{2}\right) > g(1) = e^2f(1)$, 所以 $ef(1) < f\left(\frac{1}{2}\right)$, 故 D 错误. 故选 B.



- 16. A** 【解析】对任意 $x \in \mathbf{R}$, 都有 $f(x+4)=f(x)$, 所以 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数.

$$\text{所以 } f(2\ 021)=f(1), \frac{f(2\ 022)}{2}=\frac{f(2)}{2}, \frac{f(2\ 023)}{3}=\frac{f(3)}{3}.$$

$$\text{构造函数 } F(x)=\frac{f(x)}{x} (0 < x \leq 4), \text{ 则 } F'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2} >$$

0, 所以 $F(x)$ 在区间 $(0, 4]$ 上单调递增, 所以 $F(1) < F(2) <$

$$F(3), \text{ 即 } \frac{f(1)}{1} < \frac{f(2)}{2} < \frac{f(3)}{3}, \text{ 也即 } f(2\ 021) < \frac{f(2\ 022)}{2} <$$

$$\frac{f(2\ 023)}{3}. \text{ 故选 A.}$$

- 17. $(-\infty, \frac{4}{3}) \cup (2, +\infty)$** 【解析】设 $g(x)=e^x f(x)$,

$$\text{则 } g'(x)=e^x [f(x)+f'(x)].$$

当 $x > 0$ 时, $f(x)+f'(x) > 0$, 得 $e^x [f(x)+f'(x)] > 0$, 即 $g'(x) > 0$, 故 $g(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $e^{x-2} f(2x-3) > f(x-1)$, 所以 $e^{2x-3} f(2x-3) > e^{x-1} f(x-1)$, 即 $g(2x-3) > g(x-1)$.

因为 $g(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 所以 $g(|2x-3|) > g(|x-1|)$, 即 $|2x-3| > |x-1|$, 即 $(2x-3)^2 > (x-1)^2$, 所以 $(3x-4)(x-$

$$2) > 0, \text{ 解得 } x > 2 \text{ 或 } x < \frac{4}{3}.$$

专题 2 导数中的恒成立及存在性问题



题型上分练

- 1. B** 【解析】不妨设 $x_1 > x_2$, 因为 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > -1$, 所以 $f(x_1) +$

$$x_1 > f(x_2) + x_2, \text{ 则构造函数 } g(x) = f(x) + x = e^x - \frac{1}{2}x^2 - ax, \text{ 由}$$

$$g(x_1) > g(x_2), \text{ 得 } g(x) \text{ 为增函数, 即 } g'(x) = e^x - x - a \geq 0 \text{ 恒成}$$

$$\text{立, 即 } a \leq e^x - x \text{ 恒成立. 令 } h(x) = e^x - x, \text{ 则 } h'(x) = e^x - 1, \text{ 当 } x >$$

$$0 \text{ 时, } h'(x) > 0, \text{ 当 } x < 0, h'(x) < 0, \text{ 所以 } h(x) \text{ 在 } (-\infty, 0) \text{ 上单}$$

$$\text{调递减, 在 } (0, +\infty) \text{ 上单调递增, 则 } h(x) \geq h(0) = 1, \text{ 故 } a \leq$$

$$1. \text{ 故选 B.}$$

- 2. D** 【解析】由题意知不等式 $a < \frac{x-1}{\ln x} - \ln x (x > 1)$ 恒成立, 令

$$f(x) = \frac{x-1}{\ln x} - \ln x (x > 1), \text{ 则 } a < f(x)_{\min}, \text{ 且 } f'(x) =$$

$$\frac{(\ln x - 1)(x - 1 - \ln x)}{x \cdot (\ln x)^2}. \text{ 令 } g(x) = x - 1 - \ln x, x > 1, \text{ 则 } g'(x) =$$

$$1 - \frac{1}{x}, \text{ 当 } x > 1 \text{ 时, } g'(x) > 0, g(x) \text{ 单调递增, 则 } g(x) > g(1) = 0.$$

$$\text{故当 } 1 < x < e \text{ 时, } f'(x) < 0, f(x) \text{ 单调递减; 当 } x > e \text{ 时, } f'(x) > 0,$$

$$f(x) \text{ 单调递增. 所以 } f(x) \geq f(e) = e - 2, \text{ 所以 } a < e - 2. \text{ 故选 D.}$$

- 3. D** 【解析】当 $x > 0$ 时, 若存在 x 使 $x + e^{-x} = ax$, 则 $a = 1 + \frac{1}{xe^x} > 1$;

当 $x = 0$ 时, $0 + e^{-0} = a \times 0$ 不成立;

当 $x < 0$ 时, 若存在 x 使 $x + e^{-x} = ax$, 则 $a = 1 + \frac{1}{xe^x}$ 成立, 令 $y = 1 +$

$$\frac{1}{xe^x} (x < 0), \text{ 则 } y' = -\frac{x+1}{x^2 e^x}, \text{ 当 } x \in (-\infty, -1) \text{ 时, } y' > 0, y = 1 + \frac{1}{xe^x}$$

单调递增, 当 $x \in (-1, 0)$ 时, $y' < 0, y = 1 + \frac{1}{xe^x}$ 单调递减, 所以

$x = -1$ 时, $y_{\max} = 1 - e$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $y \rightarrow$



$-\infty$, 所以 $a \leq 1-e$.

综上, $a \leq 1-e$ 或 $a > 1$. 故选 D.

4. C 【解析】当 $x > 1$ 时, 不等式等价于 $a \geq \frac{(2x-1)e^x}{x-1}$, 设 $f(x) = \frac{(2x-1)e^x}{x-1}, x > 1$,

$$\text{则 } f'(x) = \frac{[2e^x + (2x-1)e^x](x-1) - (2x-1)e^x}{(x-1)^2} = \frac{x(2x-3)e^x}{(x-1)^2},$$

所以当 $1 < x < \frac{3}{2}$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减; 当 $x > \frac{3}{2}$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增, 且当 $x \rightarrow 1$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以

由 $a \geq f(x)$ 有两个正整数解 2 和 3 可得 $\begin{cases} a \geq f(3), \\ a < f(4) \end{cases}$ (提示: 注意等号的位置), 解得 $\frac{5}{2}e^3 \leq a < \frac{7}{3}e^4$, 故实数 a 的取值范围是

$$\left[\frac{5}{2}e^3, \frac{7}{3}e^4 \right). \text{ 故选 C.}$$

5. C 【解析】令 $g(x) = e^x, h(x) = ax (a > 0)$,

因为存在唯一整数 x_0 使 $f(x_0) < 0$, 即 $e^{x_0} < ax_0$, 则 x_0 必为正整数, 所以 $g(x)$ 的图象在 $h(x)$ 的图象下方的部分有且只有一个横坐标为整数的点,

当 $h(x)$ 与 $g(x)$ 相切时, 设切点 (x_0, e^{x_0}) , 由于 $g'(x) = e^x$, 故切线斜率 $a = e^{x_0}$, 切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$,

代入 $(0, 0)$ 得 $-e^{x_0} = e^{x_0}(-x_0)$, 解得 $x_0 = 1$, 此时 $a = e$, 切点为

$(1, e)$ (提示: 先考虑临界情况), 所以 $\begin{cases} g(1) < h(1), \\ g(2) \geq h(2), \end{cases}$ 解得

$$e < a \leq \frac{e^2}{2}. \text{ 故选 C.}$$

关键点拨 在解决方程或不等式问题时, “不完全分离参数”是一种常用策略. 这种方法的核心思想是不将参数与主变量彻底分到等式或不等式的两侧, 而是通过代数变形, 将问题转化为一个含参的函数与一个不含参的函数之间的关系, 从而利用图象或导数分析求解题目.

	不完全分离参数法	完全分离参数法
变形目标	将方程或不等式变形为“含参函数与定函数”的形式	将方程或不等式变形为“参数与关于主变量的函数”的形式
转化后问题	动直线(或曲线)与定曲线的交点或相切问题	水平直线($y=k$)与定曲线($y=g(x)$)的交点问题
函数复杂度	含参函数可能较复杂, 但定函数简单	分离后关于主变量的函数可能比较复杂
几何直观	依赖于动直线的旋转或平移	依赖于水平直线与曲线的交点个数

6. A 【解析】因为 $a > 0$, 所以由 $ax - a > 0$ 可得 $x > 1$, 所以函数 $f(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$.

由 $f(x) = e^x - a \ln a - a \ln(x-1) + a \geq 0$, 可得 $\frac{e^x}{a} - \ln a \geq \ln(x-1) - 1$, 即 $e^{x-\ln a} + x - \ln a \geq x - 1 + \ln(x-1)$.

构造函数 $g(x) = x + \ln x$, 其中 $x > 0$, 则 $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$, 故函



数 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $e^{x-\ln a} > 0, x-1 > 0$, 所以 $g(e^{x-\ln a}) \geq g(x-1)$, 所以 $e^{x-\ln a} \geq x-1$, 则 $x-\ln a \geq \ln(x-1)$, 即 $\ln a \leq x-\ln(x-1)$, 其中 $x > 1$.

令 $h(x) = x - \ln(x-1), x > 1$, 则 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$, 当 $1 < x < 2$ 时, $h'(x) < 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递减, 当 $x > 2$ 时, $h'(x) > 0$, 此时函数 $h(x)$ 单调递增, 所以 $\ln a \leq h(x)_{\min} = h(2) = 2$, 解得 $a \leq e^2$.

综上, $0 < a \leq e^2$, 故选 A.

7. $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 【解析】因为 $a > 0, x > 0$, 所以 $ax > 0$, 所以不等式

关键点

$(a \ln x - x)(ae^x - x) \leq 0$ 等价于 $\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{a}\right) \leq 0$, 设

$f(x) = \frac{\ln x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$, 令 $f'(x) > 0$, 解得 $0 < x < e$; 令

$f'(x) < 0$, 解得 $x > e$, 故 $f(x)$ 在 $(0, e)$ 上单调递增, 在 $(e, +\infty)$

上单调递减, 故 $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$. 设 $g(x) = \frac{e^x}{x} (x > 0)$, 则

$g'(x) = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$, 令 $g'(x) > 0$, 解得 $x > 1$; 令 $g'(x) < 0$, 解得 $0 <$

$x < 1$, 故 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

故 $g(x) \geq g(1) = e > \frac{1}{e} \geq f(x)$, 因为 $\left(\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{a}\right) \leq 0$

恒成立, 所以 $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{a} \leq e$, 即 $\frac{1}{e} \leq a \leq e$.

8. 【解】(1) 当 $k=0$ 时, $f(x) = e^{x+1} - x^2$, 则 $f'(x) = e^{x+1} - 2x$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线斜率为 $f'(-1) = 3$, 又 $f(-1) = 0$, 所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(-1, f(-1))$ 处的切线方程为 $y=3x+3$.

(2) $f'(x) = e^{x+1} - 2x - k$, 由题意得, 当 $x \in [-1, +\infty)$ 时, $f'(x) \geq 0$ 恒成立.

令 $F(x) = f'(x)$, 则 $F'(x) = e^{x+1} - 2$, 且 $F'(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增,

令 $F'(x) = 0$, 解得 $x = \ln 2 - 1 > -1$, 所以当 $x \in (-1, \ln 2 - 1)$ 时,

$F'(x) < 0, F(x)$ 单调递减, 当 $x \in (\ln 2 - 1, +\infty)$ 时, $F'(x) > 0$,

$F(x)$ 单调递增, 所以 $F(x)_{\min} = F(\ln 2 - 1) = 4 - 2\ln 2 - k$.

又 $f'(x) \geq 0$ 在 $[-1, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $F(x)_{\min} \geq 0$, 故 $k \leq 4 - 2\ln 2$, 所以 k 的取值范围是 $(-\infty, 4 - 2\ln 2]$.

(3) 方法一(分离参数): 因为 $f(-1) = k$, 所以题干等价于当 $x \geq -1$ 时, $f(x) \geq k$. 即 $\forall x \in [-1, +\infty), e^{x+1} - x^2 - kx \geq k$, 整理得 $e^{x+1} - x^2 \geq k(x+1)$, 当 $x = -1$ 时, 不等式 $f(x) \geq f(-1)$ 恒成立, 当 $x > -1$ 时, $x+1 > 0$, 不等式等价于 $\frac{e^{x+1} - x^2}{x+1} \geq k$.

立, 当 $x > -1$ 时, $x+1 > 0$, 不等式等价于 $\frac{e^{x+1} - x^2}{x+1} \geq k$.

设 $G(x) = \frac{e^{x+1} - x^2}{x+1}, x \in (-1, +\infty)$, 则 $G'(x) =$

$\frac{(e^{x+1} - 2x)(x+1) - (e^{x+1} - x^2)}{(x+1)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}(e^{x+1} - x - 2)$.

令 $g(x) = e^x - x - 1, x \in (-\infty, +\infty)$, 则 $g'(x) = e^x - 1$, 当 $x < 0$

时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0, g(x)$ 单调

递增, 故当 $x = 0$ 时, $g(x)$ 取到最小值, 即 $g(x) \geq g(0) = 0$, 即

$e^x \geq x+1$, 所以 $e^{x+1} \geq x+2$, 即 $e^{x+1} - x - 2 \geq 0$. 所以当 $x \in (-1, 0)$

时, $G'(x) < 0, G(x)$ 单调递减, 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $G'(x) > 0$,

$G(x)$ 单调递增, 所以 $G(x)$ 的最小值为 $G(0) = e$, 故 $k \leq e$, 所以

k 的取值范围是 $(-\infty, e]$.

方法二(端点效应): 先探究必要性, 由题意知当 $x \geq -1$ 时,



$f(-1)$ 是 $f(x)$ 的最小值, 则 $f(-1) \leq f(0)$, 即得到必要条件为 $k \leq e$.

下面证充分性, 即证当 $k \leq e, x \in [-1, +\infty)$ 时, $f(x) \geq f(-1)$.

由(2)可知当 $k \leq 4 - 2\ln 2$ 时, $f(x)$ 在 $[-1, +\infty)$ 上单调递增, 故 $f(x)$ 的最小值为 $f(-1)$, $f(x) \geq f(-1)$, 符合题意, 故只需要证明 $4 - 2\ln 2 < k \leq e$ 时, $f(x) \geq f(-1)$.

由(2)的分析易知当 $4 - 2\ln 2 < k \leq e$ 时, $f'(\ln 2 - 1) < 0$, 当 $x = -1$ 时, $f'(x) = 3 - k > 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$, 所以方程 $f'(x) = 0$ 有两个根, 分别设为 $x_1, x_2, x_1 < x_2$, 则有:

x	$(-1, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	极大值	$\searrow$	极小值	$\nearrow$

设 $x_0 = -1 + \ln 2 \in (-1, 0)$, $x_1 \in (-1, x_0)$, $x_2 \in (x_0, +\infty)$. 注意到 $f'(0) = e - k \geq 0$, 据此可得 x_2 更精确的范围是 $(x_0, 0]$, 所以只需证明 $f(x_2) \geq f(-1) = k$, 又因为 $f'(x_2) = 0$, 即 $e^{x_2+1} - 2x_2 - k = 0$, 可得 $e^{x_2+1} = 2x_2 + k$, 则只需证明 $f(x_2) = e^{x_2+1} - x_2^2 - kx_2 = 2x_2 + k - x_2^2 - kx_2 \geq k$, 即 $x_2[x_2 - (2 - k)] \leq 0$.

注意到 $x_2 \in (x_0, 0]$, 即 $-1 + \ln 2 < x_2 \leq 0$,

①当 $x_2 = 0$ 时, $k = e, x_2[x_2 - (2 - k)] \leq 0$ 显然成立;

②当 $x_2 \in (x_0, 0)$ 时, 只要证明 $x_2 + k \geq 2$, 此时 $4 - 2\ln 2 < k < e$, 且 $-1 + \ln 2 < x_2 < 0$, 所以 $x_2 + k > 3 - \ln 2 > 2$, 故得证.

综上, 本题所求 k 的取值范围为 $(-\infty, e]$.

试题评析 本题第三问为不等式恒成立求参问题, 利用分离参数法、端点效应均可解, 但是不同方法的计算量相差较大, 所以在考场上对于恒成立问题选择计算量小的解题方法是关键. 优先考虑分离参数法, 若行不通再考虑其他方法.

9. B 【解析】当 $x = 0$ 时, $-a \leq 1$ ①, 当 $x = \pi$ 时, $-a \leq -1$ ②, 由①②得 $a \geq 1$, 故结合选项知实数 a 的最小值为 1.

充分性证明: 设 $g(x) = x \sin x + \cos x, x \in [0, \pi]$, 则 $g'(x) = x \cos x$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = \frac{\pi}{2}$ 或 $x = 0$, 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $g'(x) \geq 0, g(x)$ 单调递增, 当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi]$ 时, $g'(x) < 0, g(x)$ 单调递减, 又 $g(0) = 1, g(\pi) = -1, g(0) > g(\pi)$, 所以函数 $g(x)$ 的最小值为 $g(\pi) = -1$, 所以 $-a \leq -1$, 即 $a \geq 1$.

10. 【解】(1) 当 $m = -3$ 时, $f(x) = 2\ln x - x - \frac{3}{x}$, 其定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{2}{x} - 1 + \frac{3}{x^2} = \frac{-x^2 + 2x + 3}{x^2} = \frac{-(x-3)(x+1)}{x^2}, x \in (0, +\infty)$.

令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 3$, 当 $0 < x < 3$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增; 当 $x > 3$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减. 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 3)$, 单调递减区间为 $(3, +\infty)$.

(2) 方法一(端点效应): 由条件可知 $f(1) \leq 0$, 所以 $m - 1 \leq 0$, 解得 $m \leq 1$.

当 $m \leq 1$ 时, $f(x) = 2\ln x - x + \frac{m}{x} \leq 2\ln x - x + \frac{1}{x}$, 构造函数 $g(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}, x \geq 1$, 则 $g'(x) = \frac{2}{x} - 1 - \frac{1}{x^2} = -\frac{(x-1)^2}{x^2} \leq 0$, 所以函数 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x) \leq$



$g(1)=0$, 所以 $f(x) \leq 0$ 对任意的 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立, 因此实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

方法二(分离参数): 由条件可得 $m \leq x^2 - 2x \ln x$ 对任意的 $x \in [1, +\infty)$ 恒成立, 令 $h(x) = x^2 - 2x \ln x, x \geq 1$, 则 $m \leq h(x)_{\min}$. $h'(x) = 2x - 2(\ln x + 1) = 2(x - \ln x - 1)$, 令 $\mu(x) = x - \ln x - 1, x \geq 1$, 则 $\mu'(x) = \frac{x-1}{x} \geq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 所以函数 $\mu(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\mu(x) \geq \mu(1) = 0$, 所以函数 $h(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $h(x)_{\min} = h(1) = 1$, 所以 $m \leq 1$, 因此实数 m 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

11. 【解】(1) 第一步: 求导数.

函数 $f(x) = 2 \ln x + mx - \frac{1}{x}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$$\text{易知 } f'(x) = \frac{2}{x} + m + \frac{1}{x^2} = \frac{mx^2 + 2x + 1}{x^2},$$

第二步: 分 $m \geq 0$ 和 $m < 0$ 分别讨论函数 $f(x)$ 的单调性.

令 $p(x) = mx^2 + 2x + 1$, 当 $m \geq 0$ 时, $p(x) > 0$, 故 $f'(x) > 0$, 此时函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $m < 0$ 时, 由 $p(x) > 0$ 可得 $0 < x < \frac{-1 - \sqrt{1-m}}{m}$, 由 $p(x) < 0$ 可得

$$x > \frac{-1 - \sqrt{1-m}}{m},$$

故当 $x \in \left(0, \frac{-1 - \sqrt{1-m}}{m}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 单调递增;

当 $x \in \left(\frac{-1 - \sqrt{1-m}}{m}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 单调递减.

第三步: 写出结论.

综上所述, 当 $m \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无单调递减区间;

当 $m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{-1 - \sqrt{1-m}}{m}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\frac{-1 - \sqrt{1-m}}{m}, +\infty\right)$ 上单调递减.

(2) **第一步: 设切点为 $(x_0, 5x_0 - 4)$.**

因为 $y = 5x - 4$ 是曲线 $y = f(x)$ 的切线, 所以设切点为 $(x_0, 5x_0 - 4)$,

第二步: 利用 $f'(x_0) = 5$ 和 $f(x_0) = 5x_0 - 4$ 得到 $x_0 + x_0 \ln x_0 - 1 = 0$.

$$\text{则 } f'(x_0) = \frac{mx_0^2 + 2x_0 + 1}{x_0^2} = 5, \text{ 即 } (m-5)x_0^2 + 2x_0 + 1 = 0 \quad \text{①},$$

$$\text{又 } 2 \ln x_0 + mx_0 - \frac{1}{x_0} = 5x_0 - 4, \text{ 即 } 2x_0 \ln x_0 + (m-5)x_0^2 + 4x_0 - 1 = 0 \quad \text{②},$$

由②-①并整理得 $x_0 + x_0 \ln x_0 - 1 = 0$,

第三步: 设 $g(x) = x + x \ln x - 1$, 通过求导判断其单调性, 结合 $g(1) = 0$ 求得 $x_0 = 1$.

令 $g(x) = x + x \ln x - 1, x > 0$, 则 $g'(x) = \ln x + 2$, 由 $g'(x) = 0$ 可解得 $x = e^{-2}$,

则当 $x \in (0, e^{-2})$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x \in (e^{-2}, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow -1$, 且 $g(1) = 0$,

则方程 $x_0 + x_0 \ln x_0 - 1 = 0$ 有唯一解 $x_0 = 1$,

第四步: 回代求出 m 的值.

将 $x_0 = 1$ 代入①式, 可得 $m = 2$.



(3) (端点效应) 第一步: 转化为 $k(x) = 2(x-2)\ln x + mx^2 - 1 \geq 0$ 恒成立, 利用 $k(1) \geq 0$, 得出 $m \geq 1$.

由 $f(x) \geq \frac{4\ln x}{x}$, 化简得 $2(x-2)\ln x + mx^2 - 1 \geq 0$,

令 $k(x) = 2(x-2)\ln x + mx^2 - 1, x > 0$, 则 $k(x) \geq 0$ 恒成立, 所以 $k(1) = m - 1 \geq 0 \Rightarrow m \geq 1$,

第二步: 证明当 $m \geq 1$ 时, $k(x) = 2(x-2)\ln x + mx^2 - 1 \geq 0$ 恒成立, 进而得到 m 的取值范围.

则 $k(x) = 2(x-2)\ln x + mx^2 - 1 \geq 2(x-2) \cdot \ln x + x^2 - 1$.

令 $q(x) = 2(x-2) \cdot \ln x + x^2 - 1, x > 0$,

则 $q'(x) = 2\left(\ln x + \frac{x-2}{x}\right) + 2x$,

设 $\varphi(x) = 2\left(\ln x + \frac{x-2}{x}\right) + 2x, x > 0$,

则 $\varphi'(x) = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right) + 2 > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立,

则 $q'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $q'(1) = 0$,

则由 $q'(x) < 0$ 得 $0 < x < 1$, 由 $q'(x) > 0$ 得 $x > 1$,

所以 $q(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $q(x) \geq q(1) = 0$, 即 $k(x) \geq 0$ 恒成立, 所以实数 m 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

一题多解 (3) (分离参数法) 第一步: 分离参数, 将不等

式化成 $m \geq \frac{1-2(x-2)\ln x}{x^2}$ 恒成立.

易知 $x > 0$, 由 $f(x) \geq \frac{4\ln x}{x}$ 可得 $2(x-2)\ln x + mx^2 - 1 \geq 0$, 化

简得 $m \geq \frac{1-2(x-2)\ln x}{x^2}$,

第二步: 设 $G(x) = \frac{1-2(x-2)\ln x}{x^2}$, 利用导数求 $G(x)_{\max}$.

设 $G(x) = \frac{1-2(x-2)\ln x}{x^2}$, 则 $G'(x) = \frac{2(x\ln x - x + 1 - 4\ln x)}{x^3}$.

设 $H(x) = x\ln x - x + 1 - 4\ln x$, 则 $H'(x) = \ln x - \frac{4}{x}$, 且 $H'(x)$

在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

当 $0 < x < 1$ 时, $H'(x) < H'(1) = -4 < 0$, 则 $H(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 即有 $H(x) > H(1) = 0$,

即 $G'(x) > 0$, 故 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, $G(x) < G(1) = 1$.

当 $x \geq 1$ 时, $H'(3) = \ln 3 - \frac{4}{3} < 0, H'(4) = \ln 4 - 1 > 0$,

所以存在 $x_0 \in (3, 4)$, 使得 $H'(x_0) = 0$,

当 $1 \leq x < x_0$ 时, $H'(x) < 0, H(x)$ 在 $[1, x_0]$ 单调递减,

所以 $H(x) \leq H(1) = 0$, 则 $G'(x) \leq 0$, 所以 $G(x)$ 在 $[1, x_0]$ 上单调递减, 即 $G(x) \leq G(1) = 1$.

当 $x > x_0 > 3$ 时, $1 - 2(x-2)\ln x < 0, G(x) < 0 < 1$.

综上, $G(x)_{\max} = G(1) = 1$,

第三步: 得出结论.

即 $m \geq 1$, 即 m 的取值范围是 $[1, +\infty)$.

12. B 【解析】由题意得函数 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0)x + \frac{1}{2}x^2$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = f'(1)e^{x-1} - f(0) + x$, 则 $f'(1) = f'(1)e^0 - f(0) + 1$, 解得 $f(0) = 1$, 于是 $f(x) = f'(1)e^{x-1} - x + \frac{1}{2}x^2$. 又



$f(0)=f'(1)e^{-1}$, 则 $f'(1)=e$, $f(x)=e^x-x+\frac{1}{2}x^2$ (提示: 结合题干中函数解析式进行赋值).

不等式 $f(x) \geq \frac{1}{2}x^2 + (a-1)x + b \Leftrightarrow e^x - x + \frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{2}x^2 + (a-1)x + b \Leftrightarrow e^x - ax \geq b$.

令 $g(x) = e^x - ax$, 依题意, $b \leq g(x)$ 恒成立 (提示: 转化为最值问题), $g'(x) = e^x - a$,

当 $a < 0$ 时, $g'(x) > 0$, 函数 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 而当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow -\infty$, $b \leq g(x)$ 不恒成立.

当 $a = 0$ 时, $g(x) = e^x > 0$ 恒成立, 则 $b \leq 0$, $ab = 0$.

当 $a > 0$ 时, 由 $g'(x) < 0$ 得 $x < \ln a$; 由 $g'(x) > 0$ 得 $x > \ln a$, 所以函数 $g(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减; 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增, $g(x)_{\min} = g(\ln a) = a - a \ln a$.

因此 $b \leq a - a \ln a$, $ab \leq a^2(1 - \ln a)$. 令函数 $h(a) = a^2(1 - \ln a)$, $a > 0$, 求导得 $h'(a) = a(1 - 2\ln a)$, 当 $0 < a < \sqrt{e}$ 时, $h'(a) > 0$; 当 $a > \sqrt{e}$ 时, $h'(a) < 0$, 所以函数 $h(a)$ 在 $(0, \sqrt{e})$ 上单调递增, 在 $(\sqrt{e}, +\infty)$ 上单调递减, $h(a)_{\max} = h(\sqrt{e}) = \frac{e}{2}$,

因此 ab 的最大值是 $\frac{e}{2}$, 此时 $a = \sqrt{e}$, $b = \sqrt{e} - \sqrt{e} \ln \sqrt{e} = \frac{\sqrt{e}}{2}$, 而 $\frac{e}{2} > 0$, 故 ab 的最大值是 $\frac{e}{2}$.

13. $[-1, +\infty)$ 【解析】 因为 $\forall x_2 \in (0, +\infty)$, $\exists x_1 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_1) \leq g(x_2)$, 所以 $f(x)_{\min} \leq g(x)_{\min}$.

当 $x < 1$ 时, $x-1 < 0$, $e^x - e < 0$, 所以 $f(x) > 0$; 当 $x \geq 1$ 时, $x-1 \geq 0$, $e^x - e \geq 0$, 所以 $f(x) \geq 0$, 所以 $f(x)_{\min} = 0$.

所以对 $\forall x \in (0, +\infty)$, $g(x) \geq 0$,

即 $x - \ln x + a \geq 0$, 即 $a \geq \ln x - x$.

令 $h(x) = \ln x - x$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$ ($x > 0$), 当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$; 当 $x > 1$ 时, $h'(x) < 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $h(x)_{\max} = h(1) = -1$, 所以 $a \geq -1$.

14. (1) 【解】 由题意, $g(x) = f(x) + x = -1 + a \ln x + x$, 定义域为 $(0, +\infty)$, $g'(x) = \frac{a}{x} + 1 = \frac{x+a}{x}$, 若 $a \geq 0$, 则 $g'(x) > 0$ 恒成立, 因此 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

若 $a < 0$, 当 $x \in (0, -a)$ 时, $x+a < 0$, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减; 当 $x \in (-a, +\infty)$ 时, $x+a > 0$, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增.

综上, 当 $a \geq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增; 当 $a < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, -a)$ 上单调递减, 在 $(-a, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 【证明】当 $a = 1$ 时, $f(x) = -1 + \ln x$, 当 $0 < x < e$ 时, $\ln x < 1$, 故 $f(x) = \ln x - 1 < 0$,

所以要证 $1-x \geq \frac{\ln x}{f(x)}$, 即证 $(1-x)f(x) \leq \ln x$, 即证 $(1-x)(\ln x - 1) \leq \ln x$,

即证 $\ln x - 1 - x \ln x + x \leq \ln x \Rightarrow x - x \ln x - 1 \leq 0$.

令 $h(x) = x - x \ln x - 1$ ($0 < x < e$), 则 $h'(x) = 1 - (\ln x + 1) = -\ln x$,

当 $0 < x < 1$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增; 当 $1 < x < e$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减;

所以当 $x = 1$ 时, $h(x)$ 取得最大值 $h(1) = 1 - 0 - 1 = 0$.

因此对任意 $x \in (0, e)$, $h(x) \leq h(1) = 0$, 即 $x - x \ln x - 1 \leq 0$,



原不等式得证.

(3)【解】原不等式等价于 $1-x \leq \frac{\ln x}{-1+a \ln x}$ ($0 < x \leq 1$), 若 $a < 0$, 当 $0 < x < e^{\frac{1}{a}}$ 时, $-1+a \ln x > 0$, $\ln x < 0$, 所以 $1-x > 0 > \frac{\ln x}{-1+a \ln x}$, 不合题意.

若 $a=0$, 原不等式等价于 $1-x \leq -\ln x$, 即 $x-\ln x-1 \geq 0$.

令 $s(x) = x - \ln x - 1$ ($0 < x \leq 1$), 则 $s'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \leq 0$,

$s(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, $s(x) \geq s(1) = 0$, 符合题意.

若 $a > 0$, 原不等式等价于 $(1-x)(-1+a \ln x) \geq \ln x$, 即 $x-1-(ax-a+1) \ln x \geq 0$.

设 $m(x) = x-1-(ax-a+1) \ln x$ ($0 < x \leq 1$),

则 $m'(x) = 1 - \left(a \ln x + a - \frac{a-1}{x} \right)$.

令 $\varphi(x) = 1 - \left(a \ln x + a - \frac{a-1}{x} \right)$ ($0 < x \leq 1$),

则 $\varphi'(x) = -\frac{a}{x} - \frac{a-1}{x^2} = -\frac{ax+(a-1)}{x^2}$,

令 $\varphi'(x) = 0$, $x = \frac{1-a}{a}$. 当 $a \geq 1$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 所以 $\varphi(x)$, 即

$m'(x)$, 在 $(0, 1]$ 上单调递减,

所以 $m'(x) \geq m'(1) = 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增, $m(x) \leq m(1) = 0$, 不合题意;

当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $\varphi'(x) \geq 0$, 所以 $\varphi(x)$, 即 $m'(x)$, 在 $(0, 1]$ 上单调递增,

所以 $m'(x) \leq m'(1) = 0$, 所以 $m(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, $m(x) \geq m(1) = 0$, 满足题意.

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, 令 $\varphi'(x) < 0$, 得 $ax+(a-1) > 0$, 所以 $\frac{1-a}{a} < x \leq$

1 , 所以 $m'(x)$ 在 $\left(\frac{1-a}{a}, 1\right]$ 单调递减, 此时 $m'(x) \geq m'(1) =$

0 , 所以 $m(x)$ 在 $\left(\frac{1-a}{a}, 1\right]$ 单调递增, $m(x) \leq m(1) = 0$, 不合题意.

综上, 实数 a 的取值范围为 $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

真题风向练

15. 命题点 ⊙ 导数的几何意义, 利用导数研究函数的单调性及不等式恒成立问题

【解】(1) 根据 $f'(0) = 1+a$, $f(0) = b$ 表示出切线方程, 进而求得 a, b 的值.

由题知, $f'(x) = (1+x)e^x + a$, 则 $f'(0) = 1+a$, 1 分
又 $f(0) = b$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y - b = (1+a)(x - 0)$, 即 $y = (1+a)x + b$,

由题知 $\begin{cases} 1+a = -2, \\ b = 1, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} a = -3, \\ b = 1. \end{cases}$ 4 分

(2) 第一步: 将原不等式转化为 $f(x+m) - (x+m) > f(x) - x$.

由(1)知 $f(x) = xe^x - 3x + 1$. 当 $x > 0$ 时, $f(x+m) - f(x) > m$, 即 $f(x+m) - (x+m) > f(x) - x$ 5 分

第二步: 构造函数 $g(x) = f(x) - x$ ($x > 0$), 并判断 $g(x)$ 的单调性.

令 $g(x) = f(x) - x = xe^x - 4x + 1$ ($x > 0$), 则 $g'(x) = (x+1)e^x - 4$,



令 $\varphi(x) = g'(x)$, 则 $\varphi'(x) = (x+2)e^x$, 当 $x > 0$ 时, $\varphi'(x) > 0$, $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 即 $g'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g'(0) = -3 < 0$, $g'(1) = 2e - 4 > 0$, 所以存在唯一实数 $x_0 \in (0, 1)$, 使 $g'(x_0) = 0$, 则 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(0) = 1$ 9 分

第三步: 根据函数 $g(x)$ 的单调性得到 m 的取值范围.

因为 $f(x+m) - (x+m) > f(x) - x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $g(x+m) > g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 令 $g(x) = 1$, 则 $xe^x - 4x + 1 = 1$, 解得 $x = 0$ 或 $x = 2\ln 2$, 所以 m 的取值范围为 $[2\ln 2, +\infty)$.

..... 10 分

(3) 构造函数 $h(x) = f(x+k) + f(k-x) - 2f(k)$, 并判断 $h(x)$ 的单调性, 进而求得 k 的最小值.

令 $h(x) = f(x+k) + f(k-x) - 2f(k)$, 则 $h(0) = 0$,

$h'(x) = f'(x+k) - f'(k-x)$, 则 $h'(0) = 0$ 11 分

令 $m(x) = h'(x)$, $r(x) = f'(x)$, 则 $r'(x) = (x+2)e^x$,

故 $m'(x) = r'(x+k) + r'(k-x)$.

令 $m'(0) \geq 0$, 则 $2r'(k) \geq 0$, 即 $k+2 \geq 0$, 即 $k \geq -2$,

则当 $x > 0$ 时, $m'(x) > 0$, 此时 $h'(x)$ 单调递增. 14 分

又 $h'(0) = 0$, 则当 $x > 0$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增,

又 $h(0) = 0$, 则当 $x > 0$ 时, $h(x) > 0$, 则 $f(x+k) + f(k-x) > 2f(k)$.

所以 $k \geq -2$, 因此 k 的最小值为 -2 17 分

专题3 导数与函数零点问题



题型上分练

1. B 【解析】由题意得 $f'(x) = \frac{1}{x} - k$, $k \in (0, 1)$, $x > 0$. 令 $f'(x) > 0$,

得 $0 < x < \frac{1}{k}$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x > \frac{1}{k}$. 故函数 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{k})$ 上单调递增, 在 $(\frac{1}{k}, +\infty)$ 上单调递减.

因为 $k \in (0, 1)$, 所以 $f\left(\frac{1}{e}\right) = \ln \frac{1}{e} - k \times \frac{1}{e} + 1 = -1 - \frac{k}{e} + 1 = -\frac{k}{e} < 0$, $f(e^{k-1}) = \ln e^{k-1} - ke^{k-1} + 1 = k - 1 - ke^{k-1} + 1 = k(1 - e^{k-1}) >$

0 , $f(1) = \ln 1 - k + 1 = 1 - k > 0$, $f\left(\frac{1}{k}\right) = \ln \frac{1}{k} - k \times \frac{1}{k} + 1 = \ln \frac{1}{k} >$

0 , 所以 $\frac{1}{e} < x_2 < e^{k-1} < 1 < \frac{1}{k} < x_1$ (关键: 判断 $f\left(\frac{1}{e}\right)$, $f(e^{k-1})$, $f(1)$,

$f\left(\frac{1}{k}\right)$ 的正负, 确定零点的位置), 所以 $\left(x_1 - \frac{1}{k}\right)\left(x_2 - \frac{1}{e}\right) > 0$,

$\left(x_1 - \frac{1}{k}\right)(x_2 - e^{k-1}) < 0$, $(x_1 - 1)(x_2 - 1) < 0$, $\left(x_1 - \frac{1}{k}\right)\left(x_2 - \frac{1}{k}\right) <$

0 , 故 A, C, D 正确, B 错误. 故选 B.

2. B 【解析】函数 $f(x) = \ln|x| - a(|x| - 1)$ 的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, 且 $f(-x) = \ln|-x| - a(|-x| - 1) = \ln|x| - a(|x| - 1) = f(x)$, 所以 $f(x) = \ln|x| - a(|x| - 1)$ 为偶函数.

因为 $f(x) = \ln|x| - a(|x| - 1)$ 有 4 个零点, 所以 $y = \ln x - a(x - 1)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有 2 个零点, 即 $y = \ln x$ 与 $y = a(x - 1)$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有 2 个交点.

函数 $y = \ln x$ 与 $y = a(x - 1)$ 的图象均过点 $(1, 0)$, 显然 $(1, 0)$ 为两函数图象的 1 个交点.

由 $y = \ln x$, 得 $y' = \frac{1}{x}$, 则 $y'|_{x=1} = 1$, 所以函数 $y = \ln x$ 的图象在



点(1,0)处的切线的斜率为1,所以 $0 < a < 1$ 或 $a > 1$,即实数 a 的取值范围为 $(0,1) \cup (1,+\infty)$. 故选 B.

3. A 【解析】由题知, $f(x) = \begin{cases} x(e^x + e^{-x} - 2), & x \geq 0, \\ -x^2 - 2x - 4, & x < 0, \end{cases}$ 函数 $g(x) =$

$f(x) - ax$ 恰有两个零点,

因为当 $x=0$ 时, $g(0) = f(0) - 0 = 0$,所以 0 是函数 $g(x) = f(x) - ax$ 的一个零点(易错:0 这个零点不能丢),又当 $x \neq 0$ 时,由

$g(x) = f(x) - ax = 0$ 可得 $a = \frac{f(x)}{x}$,所以当 $x \neq 0$ 时,直线 $y = a$

与 $y = \frac{f(x)}{x}$ 的图象必有一个交点(关键:将问题转化为直线

$y = a$ 与 $y = \frac{f(x)}{x}$ 的图象有一个交点),由于 $y = \frac{f(x)}{x} =$

$$\begin{cases} e^x + e^{-x} - 2, & x > 0, \\ -x - \frac{4}{x} - 2, & x < 0, \end{cases} \text{ 当 } x > 0 \text{ 时, } y = e^x + e^{-x} - 2, \text{ 则 } y' = e^x - e^{-x} = \frac{e^{2x} - 1}{e^x} > 0$$

恒成立,所以函数 $y = \frac{f(x)}{x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 当 $x < 0$ 时,

$$y = -x - \frac{4}{x} - 2, \text{ 则 } y' = -1 + \frac{4}{x^2} = \frac{4 - x^2}{x^2}, \text{ 当 } y' = \frac{4 - x^2}{x^2} > 0 \text{ 时, } -2 < x <$$

$$0, \text{ 当 } y' = \frac{4 - x^2}{x^2} < 0 \text{ 时, } x < -2, \text{ 所以当 } x \in (-\infty, -2) \text{ 时, } y = \frac{f(x)}{x}$$

单调递减,当 $x \in [-2, 0)$ 时, $y = \frac{f(x)}{x}$ 单调递增,

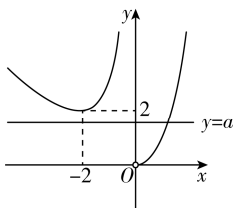
所以当 $x < 0$ 时, y 有最小值,最小值为 2,当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $y =$

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty, \text{ 当 } x \rightarrow 0^- \text{ 时, } y = \frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty, \text{ 当 } x \rightarrow 0^+ \text{ 时, } y =$$

$$\frac{f(x)}{x} \rightarrow 0, \text{ 当 } x \rightarrow +\infty \text{ 时, } y = \frac{f(x)}{x} \rightarrow +\infty, \text{ 所以 } y = \frac{f(x)}{x} =$$

$$\begin{cases} e^x + e^{-x} - 2, & x > 0, \\ -x - \frac{4}{x} - 2, & x < 0 \end{cases} \text{ 的大致图象如图所示.}$$

由图可知,若直线 $y = a$ 与 $y = \frac{f(x)}{x}$ 的图象有一个交点,则 $a \in (0, 2)$, 故选 A.



4. ABD 【解析】对于 A,显然 0 不是函数 $f(x)$ 的零点,当 $x \neq 0$

时,令 $e^x - ax^2 = 0$,变形为 $a = \frac{e^x}{x^2}$.

$$\text{令 } g(x) = \frac{e^x}{x^2}, x \neq 0, \text{ 则 } g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}. \text{ 令 } g'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3} >$$

0,得 $x > 2$ 或 $x < 0$,令 $g'(x) < 0$,得 $0 < x < 2$,所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上单调递增,在 $(0, 2)$ 上单调递减.

$$g(2) = \frac{e^2}{4}, \text{ 当 } x \rightarrow -\infty \text{ 时, } g(x) \rightarrow 0, \text{ 当 } x \rightarrow 0^- \text{ 时, } g(x) \rightarrow +\infty,$$

当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$,作出

$g(x) = \frac{e^x}{x^2}$ 的大致图象,如图①. 直线 $y = a$ 与其仅有 1 个公共

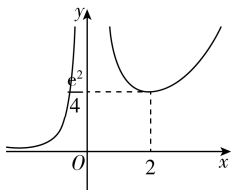
点,则 $a \in \left(0, \frac{e^2}{4}\right)$,故 A 正确.



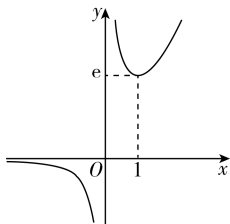
对于 B, $f'(x) = e^x - 2ax$, 令 $h(x) = f'(x)$, 函数 $f(x)$ 有且仅有 2 个极值点, 故 $h(x)$ 有 2 个变号零点, 令 $h(x) = 0$, 得 $e^x - 2ax = 0$, 显然 0 不是函数 $h(x)$ 的零点, 当 $x \neq 0$ 时, $e^x - 2ax = 0$ 变形为 $2a = \frac{e^x}{x}$. 令 $q(x) = \frac{e^x}{x} (x \neq 0)$, 则 $q'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 令 $q'(x) > 0$, 得 $x > 1$, 令 $q'(x) < 0$, 得 $x < 0$ 或 $0 < x < 1$, 故 $q(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$ 上单调递减, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 又 $q(1) = e$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $q(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow 0^-$ 时, $q(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $q(x) \rightarrow +\infty$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $q(x) \rightarrow +\infty$, 作出 $q(x)$ 的大致图象, 如图②. 问题等价于直线 $y = 2a$ 与 $q(x)$ 的图象有 2 个交点, 则 $2a \in (e, +\infty)$, 故 $a \in \left(\frac{e}{2}, +\infty\right)$, 故 B 正确.

对于 C, 结合 B 的分析, 显然当 $a < 0$ 时, $h(x)$ 有且仅有 1 个变号零点, 函数 $f(x)$ 存在唯一的极值点, 故 C 错误.

对于 D, $f(x) \geq 0$, 即 $e^x - ax^2 \geq 0$, 当 $x > 0$ 时, $e^x - ax^2 \geq 0$, 变形为 $a \leq \frac{e^x}{x^2}$, 结合 A 的分析, 当 $x > 0$ 时, $\left(\frac{e^x}{x^2}\right)_{\min} = \frac{e^2}{4}$, 故 $a \leq \frac{e^2}{4}$, 故 D 正确.



图①



图②

5. (1) 【证明】当 $a = 0$ 时, 由 $f(x) = e^x + \cos x + b$, 可得 $f'(x) = e^x - \sin x$, 因为 $x > 0$, 所以 $e^x > 1$, 又因为 $\sin x \leq 1$, 所以 $f'(x) > 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

(2) 【解】 $f'(x) = e^{x-a} - \sin x$, 因为函数 $y = f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上有极值, 所以 $f'(x) = 0$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上有解,

又因为 $f'(x) = e^{x-a} - \sin x$ 在 $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ 上单调递增, 所以需使

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)f'(\pi) < 0$, 即 $(e^{\frac{\pi}{2}-a} - 1) \times e^{\pi-a} < 0$, 所以 $e^{\frac{\pi}{2}-a} < 1$, 解得 $a >$

$\frac{\pi}{2}$, 故实数 a 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$.

(3) 【解】因为函数 $f(x)$ 的图象在点 $(2\pi, f(2\pi))$ 处的切线方程为 $x - y - 2\pi = 0$, 所以 $f'(2\pi) = e^{2\pi-a} - \sin 2\pi = 1$, 且 $f(2\pi) = e^{2\pi-a} + \cos 2\pi + b = 0$, 解得 $a = 2\pi, b = -2$.

故 $f(x) = e^{x-2\pi} + \cos x - 2$, 则 $f'(x) = e^{x-2\pi} - \sin x$,

当 $x > 2\pi$ 时, $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(2\pi, +\infty)$ 上单调递增, 因为 $f(2\pi) = e^0 + \cos 2\pi - 2 = 0$, 所以函数 $f(x)$ 在 $(2\pi, +\infty)$ 上没有零点;

当 $x = 2\pi$ 时, $f(2\pi) = e^0 + \cos 2\pi - 2 = 0$, 此时函数 $f(x)$ 有 1 个零点 2π ;

当 $x < 2\pi$ 时, $f(x) < e^0 + \cos x - 2 = \cos x - 1 \leq 0$, 即函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 2\pi)$ 上没有零点.

综上所述, 函数 $f(x)$ 的零点个数为 1.

6. 【解】(1) 由题知 $x > 1$, $f'(x) = \frac{a}{x-1} + 2x - 2 = \frac{2(x-1)^2 + a}{x-1}$,

当 $a = -8$ 时, $f'(x) = \frac{2(x-1)^2 - 8}{x-1}$.



令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 3$ 或 $x = -1$ (舍去).

当 $x \in (1, 3)$ 时, $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(1, 3)$;

当 $x \in (3, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 故 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(3, +\infty)$.

(2) 因为 $f(2) = 0$, 所以 $f(x)$ 有一个零点是 2.

令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_1 = 1 - \sqrt{-\frac{a}{2}} < 1$ (舍去), $x_2 = 1 + \sqrt{-\frac{a}{2}}$.

当 $x \in (1, x_2)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x \in (x_2, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

当 $a < -2$ 时, $x_2 = 1 + \sqrt{-\frac{a}{2}} \in (2, +\infty)$, $f(x_2) < f(2) = 0$ (提示: 此时已经证明有一点的函数值小于 0 了, 故根据零点存在定理, 需要判断是否存在函数值大于 0 的点).

$$f(1-a) = a \ln(-a) + a^2 - 1 = -a[-a - \ln(-a)] - 1.$$

下面先证明当 $x \geq 1$ 时, $x - \ln x \geq 1$.

令 $g(x) = x - \ln x (x \geq 1)$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} \geq 0$, 故 $g(x)$

在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $g(x) \geq g(1) = 1$.

因为 $-a > 2 > 1$, 所以 $f(1-a) = -a[-a - \ln(-a)] - 1 > -a - 1 > 0$.

易知 $1-a > x_2$, 所以在 $(x_2, +\infty)$ 上 $f(x)$ 存在唯一的零点 x_3 , 所以当 $a < -2$ 时, $f(x)$ 有两个零点.

7. D 【解析】 由题设 $xe^x - 2 + a = x + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个实根, 即 $a - 2 = x + \ln x - xe^x$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个实根, 令 $h(x) = x + \ln x - xe^x$, 所以直线 $y = a - 2$ 与 $h(x) = x + \ln x - xe^x$ 的图象在 $(0, +\infty)$ 上有两个交点.

易知 $h'(x) = 1 + \frac{1}{x} - (x+1)e^x$, 令 $k(x) = h'(x) (x > 0)$, 则

$k'(x) = -\frac{1}{x^2} - (x+2)e^x < 0$, 所以 $k(x) = h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单

调递减, 又 $h'\left(\frac{1}{2}\right) = 3\left(1 - \frac{\sqrt{e}}{2}\right) > 0$, $h'(1) = 2(1-e) < 0$, 所以

$\exists x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ 使 $h'(x_0) = 1 + \frac{1}{x_0} - (x_0+1)e^{x_0} = 0$, 即 $\frac{1}{x_0} = e^{x_0}$,

$x_0 = -\ln x_0$, 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 单调递增, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 单调递减, 又当 $x \rightarrow 0$ 或 $x \rightarrow +\infty$

时, $h(x) \rightarrow -\infty$, 且 $h(x_0) = x_0 + \ln x_0 - x_0 e^{x_0} = -\ln x_0 + \ln x_0 - x_0 \cdot$

$\frac{1}{x_0} = -1$, 故只需 $a - 2 < -1$, $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有两个交点, 即

$a < 1$. 故选 D.

8. 【解】 (1) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = e^x + 1$, $f(1) = e + 1$, 且 $f'(x) = e^x$, 所以 $f'(1) = e$, 故曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y - (e+1) = e(x-1)$, 即 $ex - y + 1 = 0$.

(2) $f'(x) = e^x - a$, $x \in [0, 1]$, $e^x \in [1, e]$,

因为 $1 < a < e$, 所以存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 即 $e^{x_0} = a$, 即 $x_0 = \ln a$,

当 $x \in [0, x_0)$ 时, $f'(x) < 0$, 此时 $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (x_0, 1]$ 时, $f'(x) > 0$, 此时 $f(x)$ 单调递增,

故 $f(x)_{\min} = f(x_0) = e^{x_0} - ax_0 + 1 = a - a \ln a + 1 = 3 - 2 \ln 2$,

令 $g(a) = a - a \ln a + 1 (1 < a < e)$,

则 $g'(a) = 1 - (1 + \ln a) = -\ln a < 0$,

故 $g(a)$ 在 $(1, e)$ 上单调递减, 又 $g(2) = 3 - 2 \ln 2$, 故 $a = 2$.

9. (1) 【解】 $f(x) = ax \ln x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = a(\ln x + 1)$, 令 $\ln x + 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{e}$.



当 $a < 0$, 且 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递增;

当 $a < 0$, 且 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递减;

当 $a = 0$ 时, $f(x) = 0$, 为常数函数;

当 $a > 0$, 且 $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减;

当 $a > 0$, 且 $x \in \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增.

综上所述, 当 $a = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 为常数函数, 不具有单调性;

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递减, 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递增;

当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增.

(2) 【证明】由题意, $F(x) = f(x) + g(x) = ax \ln x + ex^2 - ex$ ($x > 0$), 则 $F'(x) = a \ln x + 2ex + a - e$ ($x > 0$) (提示: 此时一阶导数的正负无法判断, 需要再次求导), 令 $\varphi(x) = F'(x) = a \ln x +$

$2ex + a - e$ ($x > 0$), 则 $\varphi'(x) = \frac{a}{x} + 2e = \frac{2ex + a}{x}$, 令 $\varphi'(x) = 0$, 即

$\frac{2ex + a}{x} = 0$, 解得 $x = -\frac{a}{2e}$, 又 $a < -2e$, 所以 $-\frac{a}{2e} > 1$, 当 $x \in$

$\left(0, -\frac{a}{2e}\right)$ 时, $\varphi'(x) < 0$, 所以 $F'(x)$ 单调递减; 当 $x \in$

$\left(-\frac{a}{2e}, +\infty\right)$ 时, $\varphi'(x) > 0$, 所以 $F'(x)$ 单调递增.

所以当 $x = -\frac{a}{2e}$ 时, 函数 $F'(x)$ 取得极小值, 也为最小值, 即

$F'\left(-\frac{a}{2e}\right) = a \ln\left(-\frac{a}{2e}\right) - e < 0$. 又 $F'\left(\frac{1}{e}\right) = 2 - e < 0$, $F'\left(\frac{1}{e^2}\right) =$

$\frac{2}{e} - e - a > \frac{2}{e} - e - (-2e) = \frac{2}{e} + e > 0$, 且 $\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e} \in \left(0, -\frac{a}{2e}\right)$,

所以 $\exists x_0 \in \left(\frac{1}{e^2}, \frac{1}{e}\right)$, 使 $F'(x_0) = 0$, 且 x_0 是 $F'(x_0)$ 在

$\left(0, -\frac{a}{2e}\right)$ 上唯一一个零点.

且当 $x \in \left(\frac{1}{e^2}, x_0\right)$ 时, $F'(x) > 0$, 当 $x \in \left(x_0, -\frac{a}{2e}\right)$ 时, $F'(x) <$

0 , 所以函数 $F(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e^2}, x_0\right)$ 上单调递增, 在 $\left(x_0, -\frac{a}{2e}\right)$ 上单

调递减, 所以 x_0 是 $F(x)$ 在 $\left(0, -\frac{a}{2e}\right)$ 上唯一的极大值点.

又因为 $F'(x)$ 在 $\left(-\frac{a}{2e}, +\infty\right)$ 上单调递增, 所以 $F(x)$ 在此区

间上无极大值点, 故 $a < -2e$ 时, $F(x)$ 存在唯一的极大值点 x_0 (提示: 隐零点问题, 下面进行代换).

$F'(x_0) = 0$, 即 $a \ln x_0 + a + 2ex_0 - e = 0$ ① (提示: 已知式),

$\frac{F(x_0)}{x_0} + a = \frac{ax_0 \ln x_0 + ex_0^2 - ex_0}{x_0} + a = a \ln x_0 + a + ex_0 - e$ (提示: 目标



式,观察发现与已知式有共同部分 $a \ln x_0 + a - e$, 可以通过整体代换消去 a),

由①知 $a \ln x_0 + a - e = -2ex_0$, 所以 $\frac{F(x_0)}{x_0} + a = (a \ln x_0 + a - e) + ex_0 = -ex_0$, 又 $\frac{1}{e^2} < x_0 < \frac{1}{e}$, 所以 $-1 < -ex_0 < -\frac{1}{e}$, 故 $-1 < \frac{F(x_0)}{x_0} + a < -\frac{1}{e}$.

真题风向练

10. B 命题点 ①利用导数求函数的最值

【解析】方法一: 由 $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ 求导得 $f'(x) = \frac{e^x+a-(x+2)e^x}{(e^x+a)^2} = \frac{-(x+1)e^x+a}{(e^x+a)^2}$. 因为 $f(x)$ 的最大值为 1, 所以存在 x_0 , 使得 $f(x_0) = 1$ 且 $f'(x_0) = 0$ (提示: 根据导数与函数最值的关系

得出), 即有 $\begin{cases} f(x_0) = \frac{x_0+2}{e^{x_0}+a} = 1, & \text{①} \\ -(x_0+1)e^{x_0}+a = 0. & \text{②} \end{cases}$ 由①得 $x_0+2 = e^{x_0}+a$, 由②

得 $a = (x_0+1)e^{x_0}$, 所以 $x_0+2 = e^{x_0} + (x_0+1)e^{x_0}$, 即 $(x_0+2)(e^{x_0}-1) = 0$, 解得 $e^{x_0} = 1$ 或 $x_0+2 = 0$, 即 $x_0 = 0$ 或 $x_0 = -2$. 当 $x_0 = 0$ 时, $a = 1$, 经验证, 符合题意; 当 $x_0 = -2$ 时, $f(x_0) = 0$, 不符合题意, 故舍去. 所以 $a = 1$. 故选 B.

方法二: 设 $e^x = t (t > 0)$, 则 $x = \ln t$, $f(x) = \frac{x+2}{e^x+a}$ 表示曲线 $y = \ln t$ 上一点 $(t, \ln t)$ 与点 $(-a, -2)$ 的连线的斜率.

结合选项知 $a > 0$, 则 $-a < 0$, 故当过点 $(-a, -2)$ 的直线与曲线 $y = \ln t$ 相切时, 斜率取得最大值, 即 $f(x)$ 取得最大值.

由 $y' = \frac{1}{t} = 1$, 得 $t = 1$, 所以切点坐标为 $(1, 0)$, 则 $\frac{0+2}{1+a} = 1$, 解得 $a = 1$. 故选 B.

方法三: 观察题目中的四个选项可知, $a > 0$, 所以 $e^x + a > 0$, 又 $\frac{x+2}{e^x+a} \leq 1$, 所以 $x+2 \leq e^x + a$, 则 $a \geq x+2-e^x$ (提示: 分离参数

a). 令 $y = x+2-e^x$, 则 $y' = 1-e^x$. 令 $y' = 0$, 解得 $x = 0$, 当 $x < 0$ 时, $y' > 0$, 此时 $y = x+2-e^x$ 单调递增; 当 $x > 0$ 时, $y' < 0$, 此时 $y = x+2-e^x$ 单调递减, 所以 y 在 $x = 0$ 处取得最大值, 且 $y_{\max} = 1$, 所以 $a \geq 1$. 又因为 $\frac{x+2}{e^x+a} \leq 1$ 能取到等号, 即 $a \geq x+2-e^x$ 能取到等号, 所以 a 只能取 1. 故选 B.

11. 命题点 ①利用导数讨论函数的单调性、极值点与零点

(1) 【证明】第一步: 对原函数求导并化简.

由 $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{1}{2}x^2 - kx^3$,

得 $f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - 3kx^2 = \frac{x^2}{x+1} - 3kx^2 = x^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3k \right)$.

..... 1 分

第二步: 通过判断 $f(x)$ 的单调性确定其在给定区间上是否有唯一零点与极值点.

当 $x > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 解得 $x_0 = \frac{1}{3k} - 1$. 因为 $0 < k < \frac{1}{3}$, 所以

$0 < 3k < 1$, 则 $x_0 = \frac{1}{3k} - 1 > 0$.

当 $0 < x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增; 当 $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$,



$f(x)$ 单调递减, 3 分

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的极大值点 $x_0 = \frac{1}{3k} - 1$.

因为 $x=0$ 时, $f(x)=0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 且 $f(x_0) > f(0)=0$ (提示: 在 $(0, x_0)$ 上 $f(x)$ 单调递增),

所以 $f(x)$ 在 $(x_0, +\infty)$ 上有唯一的零点, 所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有唯一的零点. 5 分

(2) (i) 【证明】第一步: 对函数 $g(t)$ 求导并化简.

$g(t) = f(x_1+t) - f(x_1-t)$, 且由 (1) 知 $x_1 = x_0 = \frac{1}{3k} - 1$, 则 $3k = \frac{1}{x_1+1}$ 7 分

则 $g'(t) = f'(x_1+t) + f'(x_1-t)$

$$= (x_1+t)^2 \left(\frac{1}{x_1+t+1} - 3k \right) + (x_1-t)^2 \left(\frac{1}{x_1-t+1} - 3k \right)$$

$$= (x_1+t)^2 \left(\frac{1}{x_1+t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right) + (x_1-t)^2 \left(\frac{1}{x_1-t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right)$$

$$= (x_1+t)^2 \cdot \frac{-t}{(x_1+t+1)(x_1+1)} + (x_1-t)^2 \cdot \frac{t}{(x_1-t+1)(x_1+1)}$$

$$= \frac{-t[(x_1+t)^2(x_1-t+1) - (x_1-t)^2(x_1+t+1)]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)}$$

$$= \frac{-t[(x_1+t)(x_1^2-t^2) + (x_1+t)^2 - (x_1-t)(x_1^2-t^2) - (x_1-t)^2]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)}$$

$$= \frac{-t[2t(x_1^2-t^2) + 4x_1t]}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)}$$

$$= \frac{-2t^2(x_1^2-t^2+2x_1)}{(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1)}, \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

第二步: 通过判断导函数在给定区间的正负证明其单调性.

因为 $t \in (0, x_1)$ 时, $x_1^2 - t^2 + 2x_1 > 0$, $(x_1+t+1)(x_1-t+1)(x_1+1) > 0$, $-2t^2 < 0$, 所以 $g'(t) < 0$,

则 $g(t)$ 在区间 $(0, x_1)$ 上单调递减. 12 分

(ii) 【解】 $2x_1 > x_2$, 证明如下:

由 (i) 知 $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 则 $g(x_1) < g(0) = f(x_1+0) - f(x_1-0) = 0$,

所以 $g(x_1) = f(x_1+x_1) - f(x_1-x_1) = f(2x_1) - f(0) = f(2x_1) - 0 = f(2x_1) < 0$ 14 分

因为 x_2 是 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的零点, 所以 $f(x_2) = 0$, 即 $f(2x_1) < f(x_2)$.

由 (1) 知 $x_2 \in (x_1, +\infty)$, 且 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $2x_1 > x_2$ 17 分



一题多解 (2) 根据题意 $f'(x_1) = 0, f(x_2) = 0$,

所以 $x_1 = x_0 = \frac{1}{3k} - 1$ 且 $\ln(1+x_2) - x_2 + \frac{1}{2}x_2^2 - kx_2^3 = 0$, 同时 $0 < x_1 < x_2$ 7 分

(i) $g'(t) = f'(x_1+t) + f'(x_1-t)$

$$= (x_1+t)^2 \left(\frac{1}{x_1+t+1} - 3k \right) + (x_1-t)^2 \left(\frac{1}{x_1-t+1} - 3k \right)$$

$$= (x_1+t)^2 \left(\frac{1}{x_1+t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right) + (x_1-t)^2 \left(\frac{1}{x_1-t+1} - \frac{1}{x_1+1} \right)$$

$$= (x_1+t)^2 \cdot \frac{-t}{(x_1+t+1)(x_1+1)} + (x_1-t)^2 \cdot \frac{t}{(x_1-t+1)(x_1+1)}$$

$$= \frac{t}{x_1+1} \cdot \left[\frac{(x_1-t)^2}{x_1+1-t} - \frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t} \right], \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

令 $\varphi(t) = \frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t} (-x_1 < t < x_1)$, 则 $\varphi'(t) = \frac{(x_1+t)(x_1+t+2)}{(x_1+1+t)^2}$,

当 $t \in (-x_1, x_1)$ 时, $\varphi'(t) > 0$, $\varphi(t)$ 单调递增,

当 $0 < t < x_1$ 时, $\varphi(-t) < \varphi(t)$, 所以 $\frac{(x_1-t)^2}{x_1+1-t} < \frac{(x_1+t)^2}{x_1+1+t}$.

所以 $g'(t) < 0$, 所以 $g(t)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减. ... 12 分

(ii) $2x_1 > x_2$, 证明如下: 由 (i) 知, 当 $t \in (0, x_1)$ 时, $g(t)$ 单调递减, 所以 $g(t) < g(0) = 0$, 所以 $f(x_1+t) < f(x_1-t)$,

..... 14 分

令 $t = x_1$, 所以 $f(2x_1) < f(0) = f(x_2)$, 又 $0 < x_1 < x_2$, 且 $f(x)$ 在 $(x_1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $2x_1 > x_2$ 17 分

专题 4 同构技巧



题型上分练

1.1 【解析】 $f(x) = (x-1)(2x-a)(3x-2) = 6x^3 - (10+3a)x^2 + (4+5a)x - 2a$.

不妨取 $x_1 > x_2$, 则 $x_1 - x_2 > 0$, 所以 $\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > a$, 即 $f(x_1) -$

$f(x_2) > a(x_1 - x_2)$, 亦即 $f(x_1) - ax_1 > f(x_2) - ax_2$.

令 $g(x) = f(x) - ax, x \in (1, 2)$, 则问题等价转化为 $g(x) = f(x) - ax$

关键点

在 $(1, 2)$ 上单调递增.

所以 $g'(x) = f'(x) - a = 18x^2 - 2(10+3a)x + 4 + 4a \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立, 即 $9x^2 - (10+3a)x + 2 + 2a \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立, 所以 $(2-3x)a + 9x^2 + 2 - 10x \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立, 所以 $a \leq \frac{-9x^2 + 10x - 2}{2-3x}$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立.

令 $h(x) = \frac{-9x^2 + 10x - 2}{2-3x}, x \in (1, 2)$,

则 $h'(x) = \frac{(-18x+10)(2-3x) - (-9x^2+10x-2)(-3)}{(2-3x)^2} =$

$\frac{27x^2 - 36x + 14}{(2-3x)^2}$. 因为二次函数 $y = 27x^2 - 36x + 14$ 在 $(1, 2)$ 上单

调递增, 所以当 $x \in (1, 2)$ 时, $y = 27x^2 - 36x + 14 > 27 \times 1^2 - 36 \times 1 + 14 > 0$, 即 $h'(x) > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, 2)$ 上单调递增, 所以 $h(x) > h(1) = 1$, 所以 $a \leq 1$, 所以实数 a 的最大值为 1.

2. 【解】 (1) 由题意可知 $f'(x) = \frac{m+1}{x} + 2mx = \frac{2mx^2 + m + 1}{x} (x > 0)$,

当 $m \geq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;



当 $-1 < m < 0$ 时, 若 $x \in \left(0, \sqrt{-\frac{m+1}{2m}}\right)$, 则 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调

递增, 若 $x \in \left(\sqrt{-\frac{m+1}{2m}}, +\infty\right)$, 则 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减;

当 $m \leq -1$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 故 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

综上, 当 $m \geq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;

当 $-1 < m < 0$ 时, $f(x)$ 在 $\left(0, \sqrt{-\frac{m+1}{2m}}\right)$ 上单调递增, 在

$\left(\sqrt{-\frac{m+1}{2m}}, +\infty\right)$ 上单调递减;

当 $m \leq -1$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

(2) 因为 $f(x)$ 在定义域内单调递减, 所以由 (1) 分析可知 $m \leq -1$.

不妨设 $x_1 \geq x_2$, 那么有 $f(x_1) \leq f(x_2)$,

于是不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| \geq 4|x_1 - x_2|$ 等价于 $f(x_2) - f(x_1) \geq 4(x_1 - x_2)$, 即 $f(x_2) + 4x_2 \geq f(x_1) + 4x_1$.

设 $g(x) = f(x) + 4x = (m+1)\ln x + mx^2 + 4x (x > 0)$, 则 $g(x_2) \geq g(x_1)$, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 故 $g'(x) = \frac{m+1}{x} +$

$2mx + 4 \leq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $m \leq -\frac{4x+1}{2x^2+1}$ 在 $(0, +\infty)$

上恒成立.

令 $t = 4x+1, t > 1$, 则 $x = \frac{t-1}{4}$,

故 $-\frac{4x+1}{2x^2+1} = -\frac{t}{\frac{t^2-2t+9}{8}} = -\frac{8}{t+\frac{9}{t}-2} \geq -\frac{8}{2\sqrt{t \cdot \frac{9}{t}}-2} = -2$,

当且仅当 $t = \frac{9}{t}$, 即 $t = 3, x = \frac{1}{2}$ 时取等号, 则 $m \leq -2$, 所以实数 m 的取值范围为 $(-\infty, -2]$.

3. $\frac{e^2}{2}$ 【解析】由 $\frac{e^x}{2a} - \ln \left[\frac{2a(x-1)}{e} \right] \geq 0$, 得 $\frac{e^x}{2a} \geq \ln \left[\frac{2a(x-1)}{e} \right]$, 即 $e^{x-\ln(2a)} \geq \ln[2a(x-1)] - 1 = \ln(2a) + \ln(x-1) - 1$, 所以 $e^{x-\ln(2a)} + x - \ln(2a) \geq \ln(2a) + \ln(x-1) - 1 + x - \ln(2a) = \ln(x-1) + x - 1$, 即 $e^{x-\ln(2a)} + x - \ln(2a) \geq e^{\ln(x-1)} + \ln(x-1)$ (提示: 指对同构(和差型)).

设 $f(t) = e^t + t$, 则 $f'(t) = e^t + 1 > 0$, 所以 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 又 $f(x - \ln(2a)) \geq f(\ln(x-1))$,

所以 $x - \ln(2a) \geq \ln(x-1)$, 即 $\ln(2a) \leq x - \ln(x-1)$ 恒成立 (提示: 先利用同构去掉“外层函数”, 对于简化后的不等式, 可以使用常规的分离参数法解决), 设 $g(x) = x - \ln(x-1) (x >$

$1)$, 则 $g'(x) = 1 - \frac{1}{x-1} = \frac{x-2}{x-1}$, 所以当 $x \in (1, 2)$ 时, $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 单调递减, 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增,

所以 $g(x)_{\min} = g(2) = 2$, 所以 $\ln(2a) \leq 2 = \ln e^2$, 解得 $a \leq \frac{e^2}{2}$,

则实数 a 的最大值为 $\frac{e^2}{2}$.

4. $\left[\frac{2}{e}, +\infty\right)$ 【解析】因为 $x^{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} \ln x - axe^{ax} \leq 0$, 所以 $axe^{ax} \geq$

$x^{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} \ln x$, 又 $x^{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} \ln x = x^{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x} \ln x = x^{\sqrt{x}} \ln x^{\sqrt{x}}$, $axe^{ax} = e^{ax} \cdot \ln e^{ax}$, 所以 $e^{ax} \cdot \ln e^{ax} \geq x^{\sqrt{x}} \cdot \ln x^{\sqrt{x}}$ (提示: 指对同构(积型)),



令 $f(x) = x \ln x (x > 1)$, 则 $f(e^{ax}) \geq f(x^{\sqrt{x}})$, 又 $f'(x) = \ln x + 1 (x > 1)$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $e^{ax} \geq x^{\sqrt{x}}$, 两边同时取自然对数得 $ax \geq \sqrt{x} \ln x$,

即 $a \geq \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 等价于 $a \geq \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)_{\max}$, 令

$g(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} (x > 1)$, 则 $g'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{\frac{3}{2}}} (x > 1)$, 当 $1 < x < e^2$ 时,

$g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(1, e^2)$ 上单调递增; 当 $x > e^2$ 时, $g'(x) < 0$,

$g(x)$ 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $g(x)_{\max} = g(e^2) = \frac{2}{e}$, 所

以 $a \geq \frac{2}{e}$.

5. 【解】(1) 当 $k=0$ 时, 函数 $f(x) = e^x$ 与函数 $g(x) = \ln x$ 互为反函数, 两个函数的图象关于直线 $l: y=x$ 对称, 函数 $h(x) = 1-x$ 的图象也关于直线 $l: y=x$ 对称, 所以 P, Q 关于直线 $l: y=x$ 对称.

综上所述, 点 M 为函数 $h(x) = 1-x$ 的图象与直线 $l: y=x$ 的交

点, 计算可得 M 的坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

(2) 由题知, $e^{x+k} + k \geq \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 即 $e^{x+k} + x + k \geq x + \ln x = e^{\ln x} + \ln x$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立.

构造函数 $F(x) = e^x + x$, 上式等价于 $F(x+k) \geq F(\ln x)$.

易知 $F(x)$ 为增函数,

所以 $x+k \geq \ln x$, 等价于 $k \geq \ln x - x$.

设函数 $G(x) = \ln x - x (x > 0)$, 求导可得 $G'(x) = \frac{1-x}{x}$,

当 $x \in (0, 1)$ 时, $G'(x) > 0$; 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $G'(x) < 0$,

由此可得 $G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $G(x)_{\max} = G(1) = -1$, 故实数 k 的取值范围是 $[-1, +\infty)$.

(3) $H(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 由函数 $H(x) = e^{x+k} + (k+1)x - x \ln x$, 可得 $H'(x) = e^{x+k} + k - \ln x$,

由(2)可知, 当 $k \in [-1, +\infty)$ 时, $H'(x) \geq 0$, 即 $H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 所以函数 $H(x)$ 至多只有一个零点.

所以当函数 $H(x) = e^{x+k} + (k+1)x - x \ln x$ 至少有两个相异的零点时, $k < -1$, 又因为 k 为整数, 所以不妨令 $k = -2$, 则 $H(x) = e^{x-2} - x - x \ln x$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $H(x) \rightarrow e^{-2} > 0$, $H(1) = e^{-1} - 1 < 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $H(x) \rightarrow +\infty$,

此时函数 $H(x)$ 至少存在两个相异的零点, 由此可得整数 k 的最大值为 -2 .

专题 5 放缩技巧



题型上分练

1. (1) 【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = \frac{a}{x} - [e^x + (x-1) \cdot$

$e^x] = \frac{a}{x} - xe^x = \frac{a - x^2 e^x}{x}$, 因为 $a \leq 0$, 所以对任意 $x > 0$, 都有

$f'(x) = \frac{a - x^2 e^x}{x} < 0$, 所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间.

(2) 【证明】(i) 由(1)知, $f'(x) = \frac{a - x^2 e^x}{x}$, 令 $g(x) = a - x^2 e^x$, 当

$x > 1$ 时, $g'(x) = (-2x - x^2) e^x = -x(x+2) e^x < 0$, 故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减.



因为 $a > e$, 所以 $g(a) = a - a^2 e^a = a(1 - ae^a) < 0$, 又因为 $g(1) = a - e > 0$, 所以 $g(x) = a - x^2 e^x$ 在区间 $(1, a)$ 内存在零点, 再结合 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 可得 $g(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有且仅有 1 个零点 m , 且 $m \in (1, a)$.

当 $x \in (1, m)$ 时, $f'(x) = \frac{a - x^2 e^x}{x} > 0$; 当 $x \in (m, +\infty)$ 时, $f'(x) = \frac{a - x^2 e^x}{x} < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, m)$ 上单调递增, 在 $(m, +\infty)$ 上单调递减.

又因为 $f(1) = a \ln 1 - (1-1)e^1 = 0$, 所以根据单调性可知 $f(m) > f(1) = 0$,

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以根据零点存在定理和函数单调性可知 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 内有且仅有 1 个零点.

$$(ii) \text{ 由题意可知 } \begin{cases} f'(x_0) = 0, \\ f(x_1) = 0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} \frac{a - x_0^2 e^{x_0}}{x_0} = 0, \\ a \ln x_1 - (x_1 - 1)e^{x_1} = 0, \end{cases} \quad \text{消去 } a$$

$$\text{可得 } x_0^2 e^{x_0} \ln x_1 - (x_1 - 1)e^{x_1} = 0, \text{ 即 } \ln x_1 = \frac{(x_1 - 1)e^{x_1}}{x_0^2 e^{x_0}} = (x_1 - 1) \frac{e^{x_1 - x_0}}{x_0^2}.$$

构造函数 $h(x) = x - 1 - \ln x (x > 1)$, 求导得 $h'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x} > 0$, 则 $h(x) = x - 1 - \ln x$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 即 $h(x) = x - 1 - \ln x > h(1) = 1 - 1 - \ln 1 = 0$, 所以 $x - 1 > \ln x$.

故当 $x_1 > 1$ 时, $\ln x_1 < x_1 - 1$, 则 $(x_1 - 1) \frac{e^{x_1 - x_0}}{x_0^2} = \ln x_1 < x_1 - 1 \Rightarrow \frac{e^{x_1 - x_0}}{x_0^2} < 1 \Rightarrow e^{x_1 - x_0} < x_0^2$, 两边同时取自然对数得 $x_1 - x_0 < 2 \ln x_0$, 即 $x_0 + 2 \ln x_0 > x_1$.

2. (1) 【解】由函数 $f(x) = a \ln(x+1) - 2 \sin x$, 可得 $f'(x) = \frac{a}{x+1} - 2 \cos x$,

因为曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y = x$, 所以 $f'(0) = a - 2 = 1$, 解得 $a = 3$.

(2) 【解】 $f(0) = 0$, $f'(x) = \frac{a}{x+1} - 2 \cos x$, 由 $f'(0) = a - 2 \geq 0$, 可得 $a \geq 2$ (提示: 端点效应的应用).

当 $a = 2$ 时, $f(x) = 2 \ln(x+1) - 2 \sin x$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \ln\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) - 2 < 0$, 不符合题意, 故 $a \geq 3$.

当 $a = 3$ 时, $f(x) = 3 \ln(x+1) - 2 \sin x$.

设 $m(x) = \sin x - x (x > 0)$, 则 $m'(x) = \cos x - 1 \leq 0$, 则 $m(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $m(x) < m(0) = 0$.

当 $0 < x \leq 1$ 时, $f(x) = 3 \ln(x+1) - 2 \sin x > 3 \ln(x+1) - 2x$, 令 $g(x) = 3 \ln(x+1) - 2x$, 可得 $g'(x) = \frac{3}{x+1} - 2 = \frac{1-2x}{x+1}$,

当 $0 < x < \frac{1}{2}$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $\frac{1}{2} < x \leq 1$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 上单调递增, 在 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递减, 又 $g(0) = 0$, $g(1) = 3 \ln 2 - 2 > 0$, 所以当 $0 < x \leq 1$ 时, $g(x) > 0$, 则 $f(x) > 0$.



当 $1 < x < \pi$ 时, 可得 $3\ln(x+1) > 3\ln 2 > 2 \geq 2\sin x$, 所以 $f(x) > 0$.
 所以当 $a=3$ 时, $f(x) = 3\ln(x+1) - 2\sin x > 0$ 对 $\forall x \in (0, \pi)$ 恒成立.

综上所述, 整数 a 的最小值为 3.

(3) 【证明】由 $f(x) = a\ln(x+1) - 2\sin x$, 可得 $f'(x) = \frac{a}{x+1} - 2\cos x$.

令 $\varphi(x) = f'(x) = \frac{a}{x+1} - 2\cos x$, 可得 $\varphi'(x) = 2\sin x - \frac{a}{(x+1)^2}$,

当 $a \in (0, 1)$ 时, $\varphi'(x) = 2\sin x - \frac{a}{(x+1)^2}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, 而 $\varphi'(0) < 0$, $\varphi'(\frac{\pi}{2}) > 0$, 所以存在 $x_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $\varphi'(x_0) = 0$, 所以 $f'(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

又 $f'(0) = a - 2 < 0$, $f'(x_0) < f'(0) < 0$, $f'(\frac{\pi}{2}) = \frac{a}{1+\frac{\pi}{2}} > 0$,

所以存在 $x_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$, 使得 $f'(x_1) = 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 $(x_1, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增. 又当 $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时,

$f'(x) = \frac{a}{x+1} - 2\cos x > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ 上单调递增, 所以 $f(x)$ 在 $(0, x_1)$ 上单调递减, 在 (x_1, π) 上单调递增, 所以 $x=x_1$ 是 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上的唯一极小值点, $f(x_1) < f(0) = 0$, $f(\pi) = a\ln(1+\pi) > 0$, 所以 $x_2 \in (x_1, \pi)$, 即 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点 x_2 (提示: 对于导数与三角函数的综合问题, 一个常用的方法是利用 $\frac{\pi}{2}$ 等特殊值将区间分段, 很可能将问题转化为对其中一段区间的分析上, 这是因为根据三角函数的性质, 函数值在某些区间上恒正或恒负, 因而可以简化对这些区间的讨论).

下证 $x_2 < 2x_1$.

因为 $x_1 \in (x_0, \frac{\pi}{2})$, 所以 $2x_1 < \pi$, 又因为 $f(x)$ 在 (x_1, π) 上单调递增, 所以只需证 $f(2x_1) > f(x_2) = 0$.

$f'(x_1) = 0$, 即 $\frac{a}{x_1+1} - 2\cos x_1 = 0$, 可得 $a = 2(1+x_1)\cos x_1$, 要证 $f(2x_1) = a\ln(1+2x_1) - 2\sin 2x_1 = 2(1+x_1)\cos x_1 \cdot \ln(1+2x_1) - 2\sin 2x_1 > 0$, 即证 $\ln(1+2x_1) - \frac{2\sin x_1}{1+x_1} > 0$, 因为 $\sin x_1 < x_1$, 所以

若 $\ln(1+2x_1) - \frac{2x_1}{1+x_1} > 0$ 成立, 则 $\ln(1+2x_1) - \frac{2\sin x_1}{1+x_1} > 0$ 成立,

下面证明 $\ln(1+2x_1) - \frac{2x_1}{1+x_1} > 0$ (提示: 由于多次求导法难以消去三角函数, 所以解决此类问题的关键在于利用三角放缩法将其转化为更加常规的函数).

令 $t(x) = \ln(1+2x) - \frac{2x}{1+x}$, 其中 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, 则 $t'(x) = \frac{2}{1+2x} - \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{2x^2}{(1+2x)(1+x)^2} > 0$,



所以 $t(x)$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增, $t(x) > t(0) = 0$, 所以 $t(x_1) =$

$\ln(1+2x_1) - \frac{2x_1}{1+x_1} > 0$ 成立, 即 $f(2x_1) > 0$ 成立.

所以 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 上存在唯一零点 x_2 和唯一极小值点 x_1 , 且 $x_1 < x_2 < 2x_1$.

专题 6 双变量问题



题型上分练

1. (1) 【证明】 $f(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} + ax^2$ 的定义域为 $(-1, +\infty)$,

当 $a \geq 0$ 时, $ax^2 \geq 0$, 若 $\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \geq 1 (x > -1)$ 恒成立, 则

$f(x) \geq 1$ 恒成立, 下面证明当 $x > -1$ 时, $\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \geq 1$.

令 $g(x) = \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}$, 则 $g'(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$, 令 $g'(x) = 0$, 得 $x = 0$,

所以当 $-1 < x < 0$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减;

当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x) \geq g(0) = 1$, 即 $\ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \geq 1$, 所以 $f(x) \geq 1$.

(2) 【解】 $f(x) + f(-x) = \ln(1-x^2) + \frac{2}{1-x^2} + 2ax^2, -1 < x < 1$,

令 $t = 1-x^2, t \in (0, 1]$, 由题意, $\ln t + \frac{2}{t} - 2at + 2a - 2 \geq 0$ 在 $t \in (0, 1]$ 时恒成立,

设 $h(t) = \ln t + \frac{2}{t} - 2at + 2a - 2, t \in (0, 1]$, 则 $h'(t) = \frac{1}{t} - \frac{2}{t^2} - 2a = \frac{-2at^2 + t - 2}{t^2}$.

令 $\varphi(t) = -2at^2 + t - 2, t \in (0, 1]$,

当 $a \geq -\frac{1}{2}$ 时, $\varphi(t) \leq t^2 + t - 2 \leq 0$, 所以 $h'(t) \leq 0$, 且不恒为 0,

所以 $h(t)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减, 所以 $h(t) \geq h(1) = 0$, 符合题意.

当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, $\varphi(t)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增, 又 $\varphi(0) = -2 < 0$,

$\varphi(1) = -2a - 1 > 0$, 所以存在 $t_0 \in (0, 1)$, 使得 $\varphi(t_0) = 0$, 且 $t_0 < t < 1$ 时, $\varphi(t) > 0$, 即 $h'(t) > 0$, 所以 $h(t)$ 在 $(t_0, 1]$ 上单调递增, 所以 $h(t) \leq h(1) = 0$, 不符合题意.

综上所述, a 的取值范围为 $[-\frac{1}{2}, +\infty)$.

2. 【解】(1) 由题可知, $f(x) = e^x - 2x - 2$, 则 $f'(x) = e^x - 2$, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = \ln 2$,

当 $x < \ln 2$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减,

当 $x > \ln 2$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore f(x)_{\min} = f(\ln 2) = -2\ln 2 < 0$,

又 $f(-1) = \frac{1}{e} > 0, f(2) = e^2 - 6 > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2)$ 和

$(\ln 2, +\infty)$ 内各有一个零点,

$\therefore f(x)$ 有两个零点.

(2) (i) $g'(x) = -e^{2x} + (a+1)e^x - a = -(e^x - a)(e^x - 1)$, 令 $g'(x) = 0$, 可得 $x = 0$ 或 $x = \ln a \geq \ln 2 > 0$,

当 $x \in (0, \ln a)$ 时, $g'(x) > 0$, 当 $x \in (-\infty, 0) \cup (\ln a, +\infty)$



时, $g'(x) < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, \ln a)$ 上单调递增, 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递减.

(ii) 由 $g'(m) = g'(n) = 0$, 可得 e^m, e^n 是关于 x 的方程 $-x^2 +$

关键点

$(a+1)x - a = 0$ 的两个不同的实根, 故 $e^m e^n = a, e^m + e^n = a+1$, 则 $m+n = \ln a$.

故 $g(m) + g(n) = -\frac{1}{2}(e^{2m} + e^{2n}) + (a+1)(e^m + e^n) - a(m+n) - 6$

$$= -\frac{1}{2}[(a+1)^2 - 2a] + (a+1)^2 - a \ln a - 6$$

$$= \frac{1}{2}(a+1)^2 + a - a \ln a - 6.$$

设 $h(a) = \frac{1}{2}(a+1)^2 + a - a \ln a - 6$, 当 $a \geq 2$ 时, $h'(a) = a - \ln a +$

$1 > 0$, $\therefore h(a)$ 在 $[2, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(a)$ 的最小值为 $h(2) = \frac{1}{2} - 2 \ln 2$, 故 $g(m) + g(n)$ 的最小

值为 $\frac{1}{2} - 2 \ln 2$.

3. 【解】(1) 由 $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - a \sin x$, 得 $f'(x) = \ln(x+1) + 1 - a \cos x$, 令 $p(x) = f'(x)$, 则 $p'(x) = \frac{1}{x+1} + a \sin x$.

当 $a < 0$ 时, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $(x+1) \ln(x+1) > 0, a \sin x < 0$,

故 $f(x) > 0$ 恒成立, 因此 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 内无零点.

当 $0 \leq a \leq 1$ 时, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $p'(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 在

$(0, \pi)$ 上单调递增, 故 $f'(x) > f'(0) = 1 - a \geq 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0,$

$\pi)$ 上单调递增, 故 $f(x) > f(0) = 0$, 因此 $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内

无零点.

当 $a > 1$ 时, 因为 $x \in (0, \pi)$, 所以 $p'(x) > 0$, 则 $f'(x)$ 在 $(0, \pi)$

上单调递增, 又因为 $f'(0) = 1 - a < 0, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 + \ln\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) >$

0 , 所以存在唯一的 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, 使得 $f'(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) < f'(x_0) = 0, f(x)$ 单调递减; 当 $x \in$

(x_0, π) 时, $f'(x) > f'(x_0) = 0, f(x)$ 单调递增. 因为 $f(0) = 0$, 所以

$f(x_0) < f(0) = 0$, 又 $f(\pi) = (\pi+1) \ln(\pi+1) > 0$, 故 $f(x)$ 在区

间 $(0, \pi)$ 内只有 1 个零点 x_1 , 且 $x_1 \in (x_0, \pi)$.

综上, 当 $a \leq 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内的零点个数为 0; 当 $a >$

1 时, $f(x)$ 在区间 $(0, \pi)$ 内的零点个数为 1.

(2) $f(x-1) + ax^2 \leq \frac{1}{2}be^{bx}$ 可整理为 $[x^2 - \sin(x-1)]a + x \ln x -$

$$\frac{1}{2}be^{bx} \leq 0, \text{ 令 } \varphi(a) = [x^2 - \sin(x-1)]a + x \ln x - \frac{1}{2}be^{bx}.$$

若 $\exists a \in [0, 1]$, 使得 $\varphi(a) \leq 0$, 则 $\varphi(a)_{\min} \leq 0$.

因为 $x \in (1, +\infty)$, 所以 $x^2 - \sin(x-1) \geq x^2 - 1 > 0$, 则 $\varphi(a)$ 在

$[0, 1]$ 上单调递增 (提示: 将 a 看作主元, 则 $\varphi(a) = [x^2 -$

$\sin(x-1)]a + x \ln x - \frac{1}{2}be^{bx}$ 是关于 a 的一次函数), 故

$\varphi(a)_{\min} = \varphi(0) = x \ln x - \frac{1}{2}be^{bx} \leq 0$, 故 $x \ln x \leq \frac{1}{2}be^{bx}$ 对 $\forall x \in$

$(1, +\infty)$ 恒成立, 即 $x^2 \cdot \ln x^2 \leq bx \cdot e^{bx}$ 对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 恒成

立, 即 $e^{\ln x^2} \cdot \ln x^2 \leq bx \cdot e^{bx}$ 对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 恒成立. 因为当

$x > 1$ 时, $\ln x^2 > 0$, 所以 $bx > 0$, 设 $h(x) = xe^x (x > 0)$, 则 $h'(x) =$

$(x+1)e^x > 0$, 故 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 又 $e^{\ln x^2} \cdot \ln x^2 \leq$



$bx \cdot e^{bx}$, 所以 $h(\ln x^2) \leq h(bx)$, 所以 $\ln x^2 \leq bx$, 所以 $b \geq \frac{2\ln x}{x}$

对 $\forall x \in (1, +\infty)$ 恒成立. 令 $m(x) = \frac{2\ln x}{x} (x > 1)$, 则 $b \geq$

$m(x)_{\max}$, 易知 $m'(x) = \frac{2(1-\ln x)}{x^2}$, 令 $m'(x) = 0$, 得 $x = e$, 当

$x \in (1, e)$ 时, $m'(x) > 0$, $m(x)$ 单调递增; 当 $x \in (e, +\infty)$ 时,

$m'(x) < 0$, $m(x)$ 单调递减, 故 $m(x)_{\max} = m(e) = \frac{2}{e}$, 故 b 的取

值范围是 $\left[\frac{2}{e}, +\infty\right)$.

4. (1) 【解】由题得 $f'(x) = \ln x + 1$, 则 $f'(1) = 1$, 又因为 $f(1) = 0$, 所以所求切线方程为 $y - 0 = x - 1$, 即 $y = x - 1$.

(2) 【证明】(主元法) 第一步: 确定 x_1 为主元, x_2 为参数.

不妨设 $x_1 \geq x_2 > 0$, 设 x_1 为主元, x_2 为参数, 则 $x_1 \in [x_2, +\infty)$,

第二步: 构造函数 $G(x) = f\left(\frac{x+x_2}{2}\right) - \frac{1}{2}[f(x) + f(x_2)]$, $x \geq x_2$,

求导.

设 $G(x) = f\left(\frac{x+x_2}{2}\right) - \frac{1}{2}[f(x) + f(x_2)]$, $x \geq x_2$,

则 $G'(x) = \frac{1}{2}f'\left(\frac{x+x_2}{2}\right) - \frac{1}{2}f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \ln \frac{x+x_2}{2}\right) - \frac{1}{2}(1 +$

$\ln x) = \frac{1}{2}\left(\ln \frac{x+x_2}{2} - \ln x\right) = \frac{1}{2}\ln \frac{x+x_2}{2x}$,

第三步: 讨论导数的符号.

而 $x \geq x_2 > 0$, 所以 $0 < \frac{x_2}{x} \leq 1$, $1 < 1 + \frac{x_2}{x} \leq 2$, 所以 $\frac{1}{2} < \frac{1 + \frac{x_2}{x}}{2} \leq 1$,

所以 $\ln \frac{x+x_2}{2x} = \ln \frac{1 + \frac{x_2}{x}}{2} \in \left(\ln \frac{1}{2}, 0\right]$, 即 $G'(x) \leq 0$,

第四步: 得到 $G(x)$ 的单调性和最值, 不等式得证.

所以 $G(x)$ 在 $[x_2, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $G(x) \leq G(x_2) =$

$f(x_2) - \frac{1}{2}[f(x_2) + f(x_2)] = 0$, 所以 $G(x_1) \leq 0$, 即 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq$

$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$, 不等式得证.

(3) 【证明】由题中材料及 (1) (2) 得 $f(x)$ 是凹函数, 且直线 $y = x - 1$ 是 $f(x)$ 图象的切线, 则 $f(x) \geq x - 1$,

记 $\sqrt{x} = n (n > 0)$, 则 $x - 1 - \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = n^2 - 1 - \left(n - \frac{1}{n}\right) =$

$\frac{(n+1)(n-1)^2}{n} \geq 0$,

即 $x - 1 \geq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, 所以 $f(x) \geq \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$, 当且仅当 $x = 1$ 时等号

成立.



一题多解

(2) (比值代换) 第一步: 写出 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) -$ $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ 的表达式.

$$\begin{aligned}
 & \text{设 } 0 < x_1 \leq x_2, \text{ 则 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \\
 &= \frac{x_1+x_2}{2} \ln \frac{x_1+x_2}{2} - \frac{x_1 \ln x_1 + x_2 \ln x_2}{2} \\
 &= \frac{x_1}{2} \left(\ln \frac{x_1+x_2}{2} - \ln x_1 \right) + \frac{x_2}{2} \left(\ln \frac{x_1+x_2}{2} - \ln x_2 \right) \\
 &= \frac{x_1}{2} \ln \frac{x_1+x_2}{2x_1} + \frac{x_2}{2} \ln \frac{x_1+x_2}{2x_2} \\
 &= \frac{x_1}{2} \left(\ln \frac{x_1+x_2}{2x_1} + \frac{x_2}{x_1} \ln \frac{x_1+x_2}{2x_2} \right),
 \end{aligned}$$

第二步: 设 $\frac{x_2}{x_1} = t, t \geq 1$, 将 $\ln \frac{x_1+x_2}{2x_1} + \frac{x_2}{x_1} \ln \frac{x_1+x_2}{2x_2}$ 用 t 表示.

$$\begin{aligned}
 & \text{设 } \frac{x_2}{x_1} = t, t \geq 1, \text{ 则 } \ln \frac{x_1+x_2}{2x_1} + \frac{x_2}{x_1} \ln \frac{x_1+x_2}{2x_2} = \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \right) + \\
 & t \ln \left(\frac{1}{2t} + \frac{1}{2} \right),
 \end{aligned}$$

第三步: 构造函数 $F(x) = \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \right) + x \ln \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \right)$ ($x \geq 1$), 证明 $F(x) \leq F(1) = 0$.

$$\begin{aligned}
 & \text{记 } F(x) = \ln \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \right) + x \ln \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \right) \quad (x \geq 1), \text{ 则 } F'(x) = \\
 & \frac{1}{x+1} + \ln \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{x+1} = \ln \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \right),
 \end{aligned}$$

因为 $x \geq 1$, 所以 $\frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \leq 1$, 则 $F'(x) \leq 0$, 所以 $F(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则 $F(x) \leq F(1) = 0$,

第四步: 得出结论.

$$\begin{aligned}
 & \text{所以 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} = \frac{x_1}{2} \left(\ln \frac{x_1+x_2}{2x_1} + \frac{x_2}{x_1} \ln \frac{x_1+x_2}{2x_2} \right) \leq \\
 & 0, \text{ 从而 } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.
 \end{aligned}$$

5. (1) 【解】当 $a=0$ 时, $f(x) = e^x - bx - 1, f'(x) = e^x - b$.

当 $b \leq 1$ 时, 因为 $x \geq 0, e^x \geq 1$, 所以 $f'(x) = e^x - b \geq 0, f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 则 $f(x) \geq f(0) = e^0 - b \times 0 - 1 = 0$, 满足 $f(x) \geq 0$ 恒成立.

当 $b > 1$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 即 $e^x - b = 0$, 解得 $x = \ln b$. 当 $0 \leq x < \ln b$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减, 当 $x > \ln b$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增, 因为 $f(\ln b) < f(0) = 0$, 所以不满足 $f(x) \geq 0$ 恒成立.

综上, b 的取值范围是 $(-\infty, 1]$.

(2) 【证明】当 $a > 0, b = 0$ 时, 由题意知 $e^x - ax^2 - 1 = e^x - 1 - x \ln x$ 有两个不同的实根, 即 $\ln x = ax (x > 0, a > 0)$ 有两个不同的实根.

因为方程 $f(x) = g(x)$ 存在两个不同的实根 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 > x_2 > 0$,

所以 $\ln x_1 = ax_1, \ln x_2 = ax_2$, 两式相加得 $\ln x_1 + \ln x_2 = a(x_1 + x_2)$, ①

两式相减得 $\ln x_1 - \ln x_2 = a(x_1 - x_2)$, 因为 $x_1 \neq x_2$, 所以 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} = a$. ②

要证明 $x_1 x_2 > e^2$, 即证明 $\ln x_1 + \ln x_2 > 2$,



由①,即证明 $a(x_1+x_2)>2$,

由②,即证明 $\frac{\ln x_1 - \ln x_2}{x_1 - x_2} > \frac{2}{x_1 + x_2}$,

即证明 $\ln \frac{x_1}{x_2} > \frac{2(x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} = \frac{2\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right)}{\frac{x_1}{x_2} + 1}$.

令 $\frac{x_1}{x_2} = t$, 则 $t > 1$, 即证明 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$.

令 $u(t) = \ln t - \frac{2(t-1)}{t+1} (t > 1)$, 则 $u'(t) = \frac{1}{t} - \frac{4}{(t+1)^2} = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2} > 0$, 故 $u(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $u(t) >$

$u(1) = 0$, 即 $\ln t > \frac{2(t-1)}{t+1}$ 成立, 故 $x_1 x_2 > e^2$ 得证.

6. (1) ①【解】当 $a=0$ 时, $f(x) = x \ln x - x$, 其定义域为 $(0, +\infty)$,

又 $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \ln x$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 也是最小值, 即 $f(x)_{\min} = f(1) = 1 \times \ln 1 - 1 = -1$.

②【证明】由①知, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x \ln x - x \geq -1$, 即 $x - x \ln x \leq 1$.

令 $x = \frac{1}{n^2} (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2} \ln \frac{1}{n^2} \leq 1$, 即 $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} \ln n \leq 1$,

所以 $2 \ln n \leq n^2 - 1$, 即 $\frac{\ln n}{n+1} \leq \frac{n-1}{2}$,

所以 $\frac{\ln 1}{2} + \frac{\ln 2}{3} + \cdots + \frac{\ln n}{n+1} \leq \frac{0}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{n-1}{2} = \frac{0+1+2+\cdots+n-1}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$, 得证.

(2)【证明】函数 $f(x) = (x-a) \ln x - x$ 的定义域为 $(0, +\infty)$,

$f'(x) = \ln x + \frac{x-a}{x} - 1 = \ln x - \frac{a}{x}$,

因为 x_1, x_2 是 $f(x)$ 的两个极值点, 所以 $\ln x_1 - \frac{a}{x_1} = 0, \ln x_2 - \frac{a}{x_2} = 0$, 即 $a = x_1 \ln x_1 = x_2 \ln x_2$.

令 $g(x) = x \ln x, x \in (0, +\infty)$, 则 $g'(x) = \ln x + 1$.

当 $0 < x < \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{e}$ 时, $g'(x) > 0$, 所以 $g(x)$ 在

$\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增.

故 $0 < x_1 < \frac{1}{e} < x_2$, 要证 $x_1 + x_2 > \frac{2}{e}$, 只需证 $x_2 > \frac{2}{e} - x_1$,

因为 $0 < x_1 < \frac{1}{e}$, 所以 $\frac{1}{e} < \frac{2}{e} - x_1 < \frac{2}{e}$.

因为 $g(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增, 所以要证 $x_2 > \frac{2}{e} - x_1$, 只

需证 $g(x_2) > g\left(\frac{2}{e} - x_1\right)$.

又因为 $g(x_1) = g(x_2)$, 所以只需证 $g(x_1) > g\left(\frac{2}{e} - x_1\right)$.

令 $h(x) = g(x) - g\left(\frac{2}{e} - x\right) \left(0 < x < \frac{1}{e}\right)$,



则 $h'(x) = \ln x + 1 + \ln\left(\frac{2}{e} - x\right) + 1 = \ln\left[x\left(\frac{2}{e} - x\right)\right] + 2$,

因为 $0 < x < \frac{1}{e}$, 所以 $0 < x\left(\frac{2}{e} - x\right) < \frac{1}{e^2}$,

所以 $\ln\left[x\left(\frac{2}{e} - x\right)\right] < -2$, 所以 $h'(x) < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 上单调递减, $h(x) > h\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, 所以

$g(x_1) > g\left(\frac{2}{e} - x_1\right)$, 所以 $x_1 + x_2 > \frac{2}{e}$ 得证.

第3章 ▶ 真题综合测试

题组 1

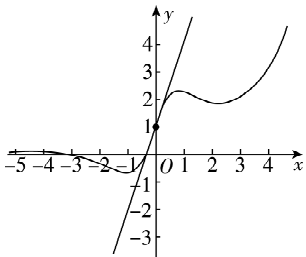
1. A 命题点 ① 导数的几何意义

【解析】因为 $f(x) = \frac{e^x + 2\sin x}{1+x^2}$, 所以 $f'(x) = \frac{(e^x + 2\cos x)(1+x^2) - 2x(e^x + 2\sin x)}{(1+x^2)^2}$, 所以 $f'(0) = 3$, 所以曲线

$y = f(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的方程为 $y = 3x + 1$, 当 $x = 0$ 时,

$y = 1$; 当 $y = 0$ 时, $x = -\frac{1}{3}$. 则所求三角形的面积 $S = \frac{1}{2} \times 1 \times$

$\left| -\frac{1}{3} \right| = \frac{1}{6}$. 故选 A.



2. ACD 命题点 ② 利用导数求函数的单调区间、极值

【解析】由题可得 $f'(x) = 2(x-1)(x-4) + (x-1)^2 = 3x^2 - 12x + 9$, 令 $f'(x) > 0$, 即 $3x^2 - 12x + 9 > 0$, 得 $x < 1$ 或 $x > 3$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $1 < x < 3$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$, $(3, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 所以 $x = 3$ 是 $f(x)$ 的极小值点, A 正确. 当 $0 < x < 1$ 时, $0 < x^2 < x < 1$, 所以 $f(x) > f(x^2)$, B 错误. 当 $1 < x < 2$ 时, $1 < 2x - 1 < 3$, 因为 $f(x)$ 在 $(1, 3)$ 上单调递减, 所以 $-4 < f(2x-1) < 0$, C 正确. $f(2-x) = (2-x-1)^2(2-x-4) = (x-1)^2(-x-2)$, 所以 $f(2-x) - f(x) = (x-1)^2(-x-2-x+4) = (x-1)^2(-2x+2)$, 令 $(x-1)^2(-2x+2) > 0$, 得 $x < 1$, 所以当 $-1 < x < 0$ 时, $f(2-x) > f(x)$ 成立, D 正确. 故选 ACD.

3. BCD 命题点 ③ 函数的极值、二次函数零点分析

【解析】依题意, $x > 0$, $f'(x) = \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2} - \frac{2c}{x^3} = \frac{ax^2 - bx - 2c}{x^3}$. 设 $g(x) = ax^2 - bx - 2c$, 由题意 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点 x_1, x_2 (提示: 将函数极值问题转化成导函数零点问题, 注意 $g(x)$ 的两个零点均需大于 0), 所以 $\Delta = b^2 + 8ac > 0$, $x_1 + x_2 = \frac{b}{a} > 0$, $x_1 x_2 = -\frac{2c}{a} > 0$, 则 $-\frac{2bc}{a^2} > 0$, 所以 $ab > 0$, $ac < 0$, $bc < 0$, 故 A 错误, B 正确, C 正确, D 正确. 故选 BCD.

快解 同上得 $g(x) = ax^2 - bx - 2c$ 有两个正零点, 则可假设 $g(x) = (x-1)(x-2)$, 所以 $a = 1, b = 3, c = -1$, 所以 $bc < 0$, 故 A 错误.



4. C 命题点 ①函数的最值问题

【解析】观察函数可知 $f(1-b)=0$, 又 $f(x) \geq 0$, 即 $f(1-b)$ 为函数

突破点

$f(x)$ 的极小值, 也是最小值,

所以 $f'(1-b)=0$.

$$\text{又 } f'(x) = \ln(x+b) + \frac{x+a}{x+b},$$

所以 $1-b+a=0$, 即 $b=a+1$ (提示: 本题的关键在于发现 a, b 之间的数量关系).

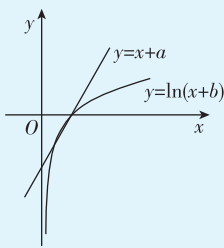
$$\text{所以 } a^2+b^2 = a^2+(a+1)^2 = 2\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2},$$

即 a^2+b^2 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

一题多解 $f(x) = (x+a) \ln(x+b) \geq 0$ 可看作 $f_1(x) = x+a$ 与

$f_2(x) = \ln(x+b)$ 在定义域 $(-b, +\infty)$ 内同正同负,

因此两函数图象与 x 轴的交点重合 (提示: 将 $f(x) = (x+a) \ln(x+b) \geq 0$ 看成直线与曲线的相交问题, 判断出在 x 轴上的交点重合), 如图所示.



令 $f_1(x) = x+a=0, f_2(x) = \ln(x+b)=0$, 得 $-a=1-b$, 即 $a-b+1=0$, 此时可以将 $a-b+1=0$ 看成一条直线, a^2+b^2 可看成直线 $a-b+1=0$ 上的点 (a, b) 到原点的距离的平方, 因而可知其最小值为原点到直线的距离的平方, 所以所求最小

值为 $\left(\frac{|0-0+1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$, 故选 C.

5. 4 命题点 ②导数的几何意义

【解析】由 $y=e^x+x+a$, 得 $y'=e^x+1$. 设切点为 $P(x_0, y_0)$, 由直线 $y=2x+5$ 是曲线 $y=e^x+x+a$ 的一条切线, 得

$$\begin{cases} e^{x_0}+1=2, \\ 2x_0+5=e^{x_0}+x_0+a, \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} x_0=0, \\ a=4. \end{cases}$$

一题多解 设切点为 $P(x_0, y_0)$, 则 $y'|_{x=x_0} = e^{x_0}+1=2$, 所以 $x_0=0$, 因此 $y_0=2x_0+5=5$. 因为点 $P(0, 5)$ 在曲线 $y=e^x+x+a$ 上, 所以 $a=4$.

方法总结 已知曲线在某点处的切线方程求切点坐标或参数的一般步骤:

- (1) 设出切点坐标;
- (2) 利用导数或斜率公式求出切线斜率;
- (3) 利用切线斜率、点在切线上、点在曲线上列出方程(组);
- (4) 求出切点坐标或参数.

6. $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 命题点 ③利用导数研究函数的单调性、极值, 求参数范围问题

【解析】 $f'(x) = 2a^x \ln a - 2ex$, 因为 $x=x_1, x=x_2$ 分别是函数 $f(x)$ 的极小值点和极大值点, 所以方程 $a^x \ln a - ex = 0$ 的两根分别为 x_1, x_2 . 令 $g(x) = a^x \ln a, h(x) = ex$, 结合函数 $g(x), h(x)$ 的图象 (如图①), 可知 $0 < a < 1$ (提示: 根据极值点附近导函数值的正



负变化情况判断). 问题转化为 $\frac{a^x}{x} = \frac{e}{\ln a}$ 有两个

不等的负根, 令 $\varphi(x) = \frac{a^x}{x}$, 则 $\varphi(x) = \frac{a^x}{x}$ 的图

象与直线 $y = \frac{e}{\ln a}$ 有两个交点, $\varphi'(x) =$

$\frac{a^x(x \ln a - 1)}{x^2}$, 令 $\varphi'(x) > 0$, 则 $x < \frac{1}{\ln a}$, 则 $\varphi(x)$

在 $(-\infty, \frac{1}{\ln a})$ 上单调递增; 令 $\varphi'(x) < 0$, 则

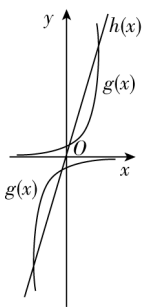
$x > \frac{1}{\ln a}$ 且 $x \neq 0$, 则 $\varphi(x)$ 在 $(\frac{1}{\ln a}, 0)$, $(0,$

$+\infty)$ 上分别单调递减. 又当 $x > 0$ 时, $\varphi(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $\varphi(x) < 0$, 所以画出 $\varphi(x)$ 的大

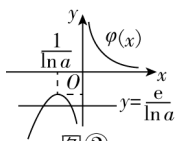
致图象如图②, 结合图象可知, $\frac{e}{\ln a} < \frac{a^{\frac{1}{\ln a}}}{\frac{1}{\ln a}}$,

即 $e > \ln^2 a \cdot a^{\frac{1}{\ln a}}$. 令 $t = \ln a < 0$, 则 $e > t^2 e$, 解得 $-1 < t < 0$, 即 $-1 < \ln a < 0$,

得 $\frac{1}{e} < a < 1$. 故 a 的取值范围是 $(\frac{1}{e}, 1)$.



图①



图②

一题多解 由题意得 $f'(x) = 2a^x \ln a - 2ex$, 根据 $f(x)$ 有极小

值点 $x = x_1$ 和极大值点 $x = x_2$ 可知, $x = x_1, x = x_2$ 为 $f'(x) = 0$

的两个不同的根, 又 $x_1 < x_2$, 所以当 $x \in (-\infty, x_1), (x_2,$

$+\infty)$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $f'(x) > 0$. ①若 $a > 1$, 则

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f'(x) \rightarrow +\infty$, 不符合题意, 舍去. ②若 $0 < a < 1$,

由 $f'(x) = 0$ 可得 $a^x \ln a = ex$. 令 $g(x) = a^x \ln a, h(x) = ex$,

在同一平面直角坐标系

中作出函数 $g(x)$ 和

$h(x)$ 的大致图象, 如图

所示. 因为 $f'(x) = 0$ 有

两个不同的根, 所以

$g(x)$ 与 $h(x)$ 的图象需

要有两个交点, 则过原

点且与 $g(x)$ 的图象相切

的直线 l 的斜率 $k < e$. 不

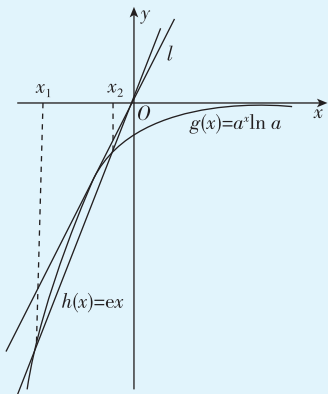
妨设直线 l 与 $g(x)$ 的图

象相切的切点坐标为 $(x_0, a^{x_0} \ln a)$, 因为 $g'(x) = a^x (\ln a)^2$, 所

以 $k = a^{x_0} (\ln a)^2 = \frac{a^{x_0} \ln a}{x_0}$, 可得 $x_0 = \frac{1}{\ln a}$, 从而 $k = a^{\frac{1}{\ln a}} (\ln a)^2 <$

e , 即 $e \cdot (\ln a)^2 < e$, 则 $(\ln a)^2 < 1$, 又 $0 < a < 1$, 所以 $-1 < \ln a <$

0 , 所以 $a \in (\frac{1}{e}, 1)$.



7. $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$ **命题点** 根据零点情况求参数

【解析】 函数 $f(x)$ 恰有一个零点即方程 $2\sqrt{x^2 - ax} = |ax - 2| - 1$ 有且仅有 1 个根, 讨论 $a = 0$ 和 $a \neq 0$ 两种情况 (提示: a 和 0 均在函数 $f(x)$ 的定义域内):



①当 $a=0$ 时, $2\sqrt{x^2}=1, x=\pm\frac{1}{2}$, 方程有两个根, 不成立;

②易知当 $a\neq 0$ 时, $x=0$ 不为方程的根, $\therefore$ 当 $a\neq 0$ 且 $x\neq 0$

时, 令 $t=ax$, 则 $x=\frac{t}{a}, t\neq 0$,

方程可化为 $2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=|t-2|-1$.

由 $|t-2|-1\geq 0$ 知 $t\leq 1$ 或 $t\geq 3$,

$$\therefore 2\sqrt{\frac{t^2}{a^2}-t}=\begin{cases} t-3, & t\geq 3, \\ 1-t, & t\leq 1 \text{ 且 } t\neq 0, \end{cases}$$

$$\therefore \frac{4t^2}{a^2}-4t=\begin{cases} t^2-6t+9, & t\geq 3, \\ t^2-2t+1, & t\leq 1 \text{ 且 } t\neq 0, \end{cases}$$

$$\therefore a^2=\begin{cases} \frac{4t^2}{t^2-2t+9}, & t\geq 3, \\ \frac{4t^2}{t^2+2t+1}, & t\leq 1 \text{ 且 } t\neq 0, t\neq -1. \end{cases}$$

当 $t\geq 3$ 时, 令 $h(t)=\frac{4t^2}{t^2-2t+9}$, 则 $h'(t)=$

$$\frac{8t(t^2-2t+9)-4t^2(2t-2)}{(t^2-2t+9)^2}=\frac{-8t^2+72t}{(t^2-2t+9)^2}; \text{ 当 } t\leq 1 \text{ 且 } t\neq 0, t\neq -1$$

时, 令 $g(t)=\frac{4t^2}{t^2+2t+1}$, 则 $g'(t)=\frac{8t(t^2+2t+1)-4t^2(2t+2)}{(t^2+2t+1)^2}=$

$$\frac{8t^2+8t}{(t^2+2t+1)^2}.$$

令 $h'(t)=0$, 解得 $t=0$ 或 $t=9$, $\therefore t\geq 3$, $\therefore h(t)$ 在 $(3, 9)$ 上单调递增, 在 $(9, +\infty)$ 上单调递减, 且 $h(3)=3$, 当 $t\rightarrow+\infty$ 时, $h(t)=$

$$\frac{4}{1-\frac{2}{t}+\frac{9}{t^2}}\rightarrow 4.$$

令 $g'(t)=0$, 解得 $t=-1$ 或 $t=0$, $\therefore t\leq 1$ 且 $t\neq 0, t\neq -1$, $\therefore g(t)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, 1)$ 上单调递

增, 且 $g(1)=1$, 当 $t\rightarrow 0$ 时, $g(t)=\frac{4}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}\rightarrow 0$, 当 $t\rightarrow -1$ 时,

$$g(t)\rightarrow +\infty, \text{ 当 } t\rightarrow -\infty \text{ 时, } g(t)=\frac{4}{1+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}}=\frac{4}{\left(\frac{1}{t}+1\right)^2}\rightarrow 4.$$

根据上述分析画出函数 $h(t)=\frac{4t^2}{t^2-2t+9}(t\geq 3)$ 和函数 $g(t)=$

$\frac{4t^2}{t^2+2t+1}(t\leq 1 \text{ 且 } t\neq 0, t\neq -1)$ 的大致图象如图所示.

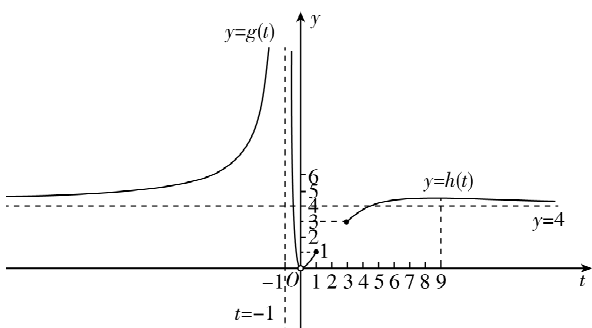
由图可知, 当 $1 < a^2 < 3$ 时, 函数 $y=a^2$ 与 $y=$

$\begin{cases} h(t), & t\geq 3, \\ g(t), & t\leq 1 \text{ 且 } t\neq 0, t\neq -1 \end{cases}$ 的图象有一个交点, 解得 $-\sqrt{3} < a <$

-1 或 $1 < a < \sqrt{3}$,



$\therefore a$ 的取值范围为 $(-\sqrt{3}, -1) \cup (1, \sqrt{3})$.



8. ①②③④ **命题点** ①函数的奇偶性、图象的对称性, 利用导数分析函数的性质

【解析】 设 $g(x) = x^2 - \cos x - c^2$, 定义域为 $\mathbf{R}$,

则 $g(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) - c^2 = x^2 - \cos x - c^2 = g(x)$, 所以 $g(x)$ 为偶函数, 图象关于 y 轴对称.

$g'(x) = 2x + \sin x$, 当 $x > 0$ 时, $g'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 又 $g(x)$ 为偶函数, 所以 $g(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 则 $g(0) = -1 - c^2$ 是 $g(x)$ 的极小值, 也是最小值.

又 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$ (提示: 根据 $y = \cos x$ 的有界性, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x)$ 图象的变化趋势近似于 $y = x^2$ 图象的变化趋势), 所以 $g(x)$ 的大致图象如图①所示, 所以 $f(x)$ 的大致图象如图②所示.

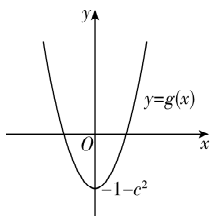
对于①, 结合 $f(x)$ 的图象, 因为 -1 和 1 关于原点对称, 所以 $f(x)$ 在 $(-1, 1]$ 上一定有最大值和最小值, 故①正确;

对于②, 当 $c = 0$ 时, $f(x)$ 的极大值是 1 , 结合图象可知 $f(x) = 1$ 有 3 个解, 故②正确;

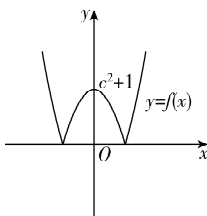
对于③, 当 $c = 1$ 时, $f(x) = |x^2 - \cos x - 1|$, $g(x) = x^2 - \cos x - 1$, 由前面的分析知 $g(x)$ 在 $(1, 2]$ 上单调递增, 且 $g(1) = -\cos 1 \in (-1, 0)$, $g(2) = 3 - \cos 2 > 3$, 所以 $f(1) = |g(1)| < f(2) = |g(2)|$, 所以当 $c = 1, x \in (1, 2]$ 时, $f(x)$ 的大致图象如图③所示, 则 $f(x)$ 有最大值, 且在 $x = 2$ 处取得, 故③正确;

对于④, 因为 $f(x)$ 的极大值是 $c^2 + 1$, 又 $c > 0$, 则 $c^2 + 1 > c$ 恒成立, 所以结合图象可知 $f(x)$ 的图象与直线 $y = c$ 有 4 个交点, 故④正确.

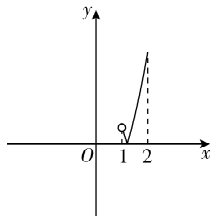
综上, 正确结论的序号是①②③④.



图①



图②



图③

9. **必刷考点** ①已知切线斜率求参数, 利用导数研究函数的单调性、极值

【解】 (1) $f'(x) = a + \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + a + 1, x > 0$.

由题意 $f'(e) = 4$, 即 $\ln e + a + 1 = 4$, 解得 $a = 2$.



(2) 因为 $f(x) = x(2 + \ln x)$, $x > 0$, 所以 $f'(x) = \ln x + 3$, $x > 0$.

当 $f'(x) > 0$ 时, $\ln x + 3 > 0$, 则 $x > e^{-3}$; 当 $f'(x) < 0$ 时, $\ln x + 3 < 0$, 则 $0 < x < e^{-3}$,

所以函数 $f(x)$ 在 $(0, e^{-3})$ 上单调递减, 在 $(e^{-3}, +\infty)$ 上单调递增.

所以当 $x = e^{-3}$ 时, 函数 $f(x)$ 取得极小值, 且 $f(e^{-3}) = e^{-3} \times [2 + (-3)] = -\frac{1}{e^3}$, 无极大值.

10. 命题点 ①利用导数研究函数的单调性、不等式证明

(1) 【解】因为 $f(x) = a(e^x + a) - x$, 所以 $f'(x) = ae^x - 1$,

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) < 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减;

..... 2 分

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 可得 $x = -\ln a$,

当 x 变化时, $f(x)$ 与 $f'(x)$ 变化如下表:

x	$(-\infty, -\ln a)$	$-\ln a$	$(-\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

当 $x \in (-\infty, -\ln a)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

当 $x \in (-\ln a, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增.

综上, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减; 当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增.

..... 5 分

(2) 【证明】由 (1) 可知当 $a > 0$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, -\ln a)$ 上单调递减, 在 $(-\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)_{\min} = f(-\ln a) = a\left(\frac{1}{a} + a\right) + \ln a = a^2 + \ln a + 1$, 7 分

构造函数 $g(a) = a^2 + \ln a + 1 - 2\ln a - \frac{3}{2} = a^2 - \ln a - \frac{1}{2}$ (提示:

构造关于 a 的函数 $g(a)$, 只需证明 $g(a)$ 的最小值大于 0 即可), 8 分

则 $g'(a) = 2a - \frac{1}{a} = \frac{2a^2 - 1}{a}$,

令 $g'(a) = 0$, 解得 $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (负值舍去).

当 $a \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 时, $g'(a) < 0$, $g(a)$ 单调递减, 当 $a \in$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ 时, $g'(a) > 0$, $g(a)$ 单调递增, 10 分

所以 $g(a)_{\min} = g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2} - \ln 2^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = \ln \sqrt{2} > 0$,

所以当 $a > 0$ 时, $f(x) > 2\ln a + \frac{3}{2}$ 12 分

11. 命题点 ②求函数的极值、不等式恒成立求参数范围

【解】(1) 当 $a = -2$ 时, $f(x) = (1 + 2x) \ln(1 + x) - x$, $x > -1$,

$f'(x) = 2\ln(1 + x) + \frac{x}{1 + x}$.

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $-1 < x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

故 $f(x)$ 的极小值为 $f(0) = 0$, 无极大值. 4 分



$$(2) f(x) = (1-ax) \ln(1+x) - x, f'(x) = -a \ln(1+x) - \frac{(a+1)x}{1+x}.$$

$$\text{令 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g'(x) = -\frac{a}{1+x} - \frac{a+1}{(1+x)^2}.$$

因为当 $x \geq 0$ 时, $f(x) \geq 0$, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 0$,

所以 $g'(0) = -1-2a \geq 0$, 得 $a \leq -\frac{1}{2}$ 8 分

当 $a \leq -\frac{1}{2}$ 时, $g'(x) \geq \frac{1}{2(1+x)} - \frac{1}{2(1+x)^2} = \frac{x}{2(1+x)^2} \geq 0$, 且

等号不恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f'(x) = g(x) \geq g(0) = 0$, 且等号不恒成立,

故 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x) \geq f(0) = 0$ 恒成立,

故 a 的取值范围为 $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right]$ 12 分

12. 命题点 ⊙ 导数的几何意义、利用导数解决不等式恒成立问题

(1) 【解】 $f(x) = x \ln x$, 则 $f'(x) = \ln x + 1, f'(1) = 1$, 又 $f(1) = 0$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 0)$ 处的切线方程为 $y - 0 = x - 1$, 即 $x - y - 1 = 0$ 4 分

(2) 【解】 依题意, $x \ln x \geq a(x - \sqrt{x})$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立.

令 $t = \sqrt{x}, t > 0$, 则 $x = t^2, x > 0$, 则有 $2t^2 \ln t \geq at(t-1)$,

又 $t > 0$, 所以 $2t \ln t \geq a(t-1)$ 对任意 $t \in (0, +\infty)$ 恒成立.

令 $g(t) = 2t \ln t - at + a$, 即问题转化为对任意 $t \in (0, +\infty)$, 有 $g(t) \geq 0$ 恒成立.

$g'(t) = 2 \ln t + 2 - a$, 令 $g'(t) = 0$, 则 $t = e^{\frac{a-2}{2}}$, 所以 $g(t)$ 在 $(0, e^{\frac{a-2}{2}})$ 上单调递减, 在 $(e^{\frac{a-2}{2}}, +\infty)$ 上单调递增.

又 $g(1) = 0$, 所以 $e^{\frac{a-2}{2}} = 1$, 解得 $a = 2$ (提示: 只有当极小值即最小值等于 0 时, $g(t) \geq 0$ 才恒成立). 9 分

(3) 【证明】 不妨设 $0 < x_2 < x_1 < 1$, 则 $0 < x_1 - x_2 < 1$, 所以 $x_1 - x_2 < \sqrt{x_1 - x_2}$.

因为 $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 = x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2}$ ①, $(\sqrt{x_1 - x_2})^2 = x_1 - x_2$ ②,

①-②得 $(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 - (\sqrt{x_1 - x_2})^2 = 2x_2 - 2\sqrt{x_1 x_2} < 0$, 所以 $\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < \sqrt{x_1 - x_2}$ 10 分

因为 $f(x_2) - f(x_1) = x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1$, 所以可先证明 $x_2 \ln x_2 - x_1 \ln x_1 < \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}$, 即证 $x_2 \ln x_2 + \sqrt{x_2} < x_1 \ln x_1 + \sqrt{x_1}$.

令 $h(x) = x \ln x + \sqrt{x}, x \in (0, 1)$, 则 $h'(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

令 $H(x) = \ln x + 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 则 $H'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x\sqrt{x}} = \frac{4\sqrt{x} - 1}{4x\sqrt{x}}$.

令 $H'(x) = 0$, 得 $x = \frac{1}{16}$,

所以 $h'(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{16}\right)$ 上单调递减, 在 $\left(\frac{1}{16}, 1\right)$ 上单调递增,

所以 $h'(x)_{\min} = h'\left(\frac{1}{16}\right) = 3 - 4 \ln 2 > 0$,



所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 所以 $h(x_1) > h(x_2)$, 即 $f(x_2) - f(x_1) < \sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} < \sqrt{x_1 - x_2}$ 13 分

可先证 $x_1 \ln x_1 - x_2 \ln x_2 < x_1 - x_2$, 即证 $x_1 \ln x_1 - x_1 < x_2 \ln x_2 - x_2$.

令 $t(x) = x \ln x - x, x \in (0, 1)$, 则 $t'(x) = \ln x < 0$, 则 $t(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减,

所以 $t(x_1) < t(x_2)$, 即 $f(x_1) - f(x_2) < x_1 - x_2 < \sqrt{x_1 - x_2}$.

若 $x_1 = x_2$, 则 $|f(x_1) - f(x_2)| = \sqrt{|x_1 - x_2|}$.

综上, $|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^{\frac{1}{2}}$, 得证. 15 分

13. 命题点 ⊙ 导数与函数的单调性、最值, 函数的零点

(1) 【解】 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$$f'(x) = e^x - a, g'(x) = a - \frac{1}{x}.$$

① 当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) > 0$ 恒成立, 所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增, 即 $f(x)$ 没有最小值, 不符合题意. 2 分

② 当 $a > 0$ 时, 在 $(-\infty, \ln a)$ 上 $f'(x) < 0$, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上 $f'(x) > 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln a)$ 上单调递减, 在 $(\ln a, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $f(x)$ 在 $x = \ln a$ 时取得极小值, 即为最小值, 最小值为 $f(\ln a) = a - a \ln a$.

在 $(0, \frac{1}{a})$ 上 $g'(x) < 0$, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上 $g'(x) > 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(0, \frac{1}{a})$ 上单调递减, 在 $(\frac{1}{a}, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{a}$ 时取得极小值, 即为最小值, 最小值为

$$g\left(\frac{1}{a}\right) = 1 + \ln a.$$

因为 $f(x) = e^x - ax$ 和 $g(x) = ax - \ln x$ 有相同的最小值,

所以 $f(\ln a) = g\left(\frac{1}{a}\right)$, 即 $a - a \ln a = 1 + \ln a$.

因为 $a > 0$, 所以上式等价于 $\ln a - \frac{a-1}{a+1} = 0$ 4 分

$$\text{令 } h(x) = \ln x - \frac{x-1}{x+1} (x > 0),$$

则 $h'(x) = \frac{x^2+1}{x(x+1)^2} > 0$ 恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

又因为 $h(1) = 0 = h(a)$ 且 $a > 0$, 所以 $a = 1$ 5 分

(2) 【证明】方法一: 由 (1) 知, $f(x) = e^x - x, g(x) = x - \ln x$.

$f(x)$ 和 $g(x)$ 在定义域内都是随着 x 的增大先单调递减后单调递增的, 且最小值都为 1. 所以当 $b \leq 1$ 时, 直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 最多共有两个不同的交点, 不满足题意. 6 分

当 $b > 1$ 时, 直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 分别有两个不同的交点, 故由题设可知, 直线 $y = b$ 过曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的交点.

于是设函数 $G(x) = f(x) - g(x) = e^x + \ln x - 2x$, 则 $G'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2$. 当 $x > 0$ 时, $G'(x) = e^x + \frac{1}{x} - 2 > 1 + x + \frac{1}{x} - 2 > 0$, 所以

$G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 8 分



又 $G(e^{-2}) = e^{e^{-2}} - 2 - 2e^{-2} < \sqrt{e} - 2 < 0$, $G(1) = e - 2 > 0$, 所以 $G(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有一个零点 x_0 , 且 $x_0 \in (e^{-2}, 1)$. 从而取 $b = e^{x_0} - x_0$, 则 $b = x_0 - \ln x_0$.

由(1)知 $b > 1$, 故 x_0 是函数 $f(x) - b$ 在 $(0, +\infty)$ 上的唯一零点; 又 $f(\ln x_0) = b$, 故 $\ln x_0$ 是函数 $f(x) - b$ 在 $(-\infty, 0)$ 上的唯一零点. 10 分

同理可得 x_0 是函数 $g(x) - b$ 在 $(0, 1)$ 上的唯一零点; e^{x_0} 是函数 $g(x) - b$ 在 $(1, +\infty)$ 上的唯一零点. 因此直线 $y = b$ 与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 从左到右分别为 $(\ln x_0, b)$, (x_0, b) , (e^{x_0}, b) .

因为 $e^{x_0} + \ln x_0 = 2x_0$, 所以这三个交点的横坐标成等差数列.

..... 12 分

方法二: 由(1)知, $f(x) = e^x - x$, $g(x) = x - \ln x$. $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, $(0, +\infty)$ 上单调递增, 且 $f(0) = 1 > 0$; $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $(1, +\infty)$ 上单调递增, 且 $g(1) = 1 > 0$. 所以曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 的大致形状如图所示. 6 分

设直线 $y = b$ 与曲线 $y = f(x)$, $y = g(x)$ 三个交点的横坐标分别为 x_1, x_2, x_3 ($x_1 < x_2 < x_3$), 所以 $x_1 < 0, 0 < x_2 < 1, x_3 > 1$,

$$\text{且 } f(x_1) = f(x_2) = e^{x_1} - x_1 = e^{x_2} - x_2 = b,$$

$$g(x_2) = g(x_3) = x_2 - \ln x_2 = x_3 - \ln x_3 = b.$$

$$\text{所以 } e^{\ln x_2} - \ln x_2 = e^{\ln x_3} - \ln x_3 = b, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{即 } f(\ln x_2) = f(\ln x_3) = b.$$

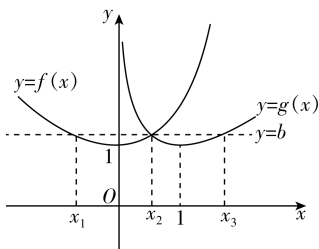
$$\text{又 } \ln x_2 < 0, \ln x_3 > 0,$$

$$\text{所以 } x_1 = \ln x_2, x_2 = \ln x_3, \textcircled{1} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{且 } e^{x_2} - x_2 = x_2 - \ln x_2, \text{即 } e^{x_2} + \ln x_2 = 2x_2. \textcircled{2}$$

$$\text{由 } \textcircled{1}\textcircled{2} \text{ 得 } x_1 + x_3 = \ln x_2 + e^{x_2} = 2x_2,$$

所以存在直线 $y = b$, 其与两条曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 共有三个不同的交点, 并且从左到右的三个交点的横坐标成等差数列. 12 分



14. 命题点 ①利用导数研究函数的单调性、最值, 导数的几何意义

(1) **【解】** 第一步: 求导数.

$$\text{令 } g(x) = f'(x), \text{ 则 } g'(x) = \frac{1 - \ln(1+x)}{(1+x)^2}, \quad \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

第二步: 讨论 $g(x)$ 的单调性.

令 $g'(x) = 0$, 得 $x = e - 1$, 当 $-1 < x < e - 1$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x > e - 1$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减, 3 分

第三步: 求出 $f'(x)$ 的最大值.

$$\text{所以 } g(x)_{\max} = g(e-1) = \frac{1}{e}, \text{ 即 } f'(x) \text{ 的最大值为 } \frac{1}{e}. \quad \dots\dots 4 \text{ 分}$$



(2)【证明】第一步:写出 l_1 的方程.

由题可知 l_1 的方程为 $y=f'(a)(x-a)+f(a)$, 5 分

第二步:构造函数,并求导.

令 $F(x)=f(x)-f'(a)(x-a)-f(a)$,

则 $F'(x)=f'(x)-f'(a)$ 6 分

第三步:讨论 $F(x)$ 的单调性.

由(1)知 $f'(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递增,

故当 $-1<x<a$ 时, $f'(x)<f'(a)$, 则 $F'(x)<0$;

当 $a<x<0$ 时, $f'(x)>f'(a)$, 则 $F'(x)>0$;

又当 $x\geq 0$ 时, $f'(x)\geq 0>f'(a)$, 则 $F'(x)>0$,

因此 $F(x)$ 的单调递减区间为 $(-1,a)$, 单调递增区间为 $(a,+\infty)$ 8 分

第四步:证明结论成立.

故当 $x\neq a$ 时, $F(x)>F(a)=0$,

即除切点 A 外, 曲线 $y=f(x)$ 均在 l_1 上方. 9 分

(3)【解】第一步:分别求 $f(a)$, $f'(a)$ 的取值范围.

由(1)结合 $f'(0)=0$, 可知当 $-1<x<0$ 时, $f'(x)<0$, 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,

故函数 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 上单调递减, 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增,

又 $a>0$, 所以 $f(a)>f(0)=0$.

由(1)知, $f'(x)$ 在 $(0,e-1)$ 上单调递增, 在 $(e-1,+\infty)$ 上单

调递减, 且 $f'(x)_{\max}=f'(e-1)=\frac{1}{e}$, 当 $x>0$ 时, $f'(x)>0$,

所以当 $a>0$ 时, $f'(a)\in\left(0,\frac{1}{e}\right]$ 11 分

第二步:分别求出 x_1, x_2 及目标式.

令 $y=f'(a)(x-a)+f(a)=0$, 得 $x_1=a-\frac{f(a)}{f'(a)}$.

易知 l_2 的方程为 $y=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)+f(a)$,

令 $y=0$, 得 $x_2=a+f(a)f'(a)$.

所以 $\frac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}=\frac{\frac{f(a)}{f'(a)}-f(a)f'(a)}{\frac{f(a)}{f'(a)}+f(a)f'(a)}=\frac{1-[f'(a)]^2}{1+[f'(a)]^2}=\frac{2}{1+[f'(a)]^2}-1$,

..... 13 分

第三步:求目标式的取值范围.

由于 $[f'(a)]^2\in\left(0,\frac{1}{e^2}\right]$, 因此 $\frac{2}{1+[f'(a)]^2}-1\in\left[\frac{e^2-1}{e^2+1},1\right)$,

即 $\frac{2a-x_1-x_2}{x_2-x_1}$ 的取值范围为 $\left[\frac{e^2-1}{e^2+1},1\right)$ 15 分

15. 命题点 ⊙ 导数的几何意义、利用导数证明不等式、根据不等式恒成立求参数最值

(1)【解】第一步:求 $f(0)$, $f'(0)$.

$f(0)=e^0-\frac{2}{3}\sin 0=1, \therefore f'(x)=e^x-\frac{2}{3}\cos x$,

$\therefore f'(0)=e^0-\frac{2}{3}\cos 0=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$, 3 分

第二步:写出切线方程.

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为 $y-1=\frac{1}{3}x$,

即 $x-3y+3=0$ 4 分



(2)【证明】第一步：构造新函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x - 1$
 $1\left(x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)\right)$.

令 $g(x) = f(x) - \frac{1}{3}x - 1 = e^x - \frac{2}{3}\sin x - \frac{1}{3}x - 1$
 $\left(x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)\right)$, 5分

第二步：求导，并在 $[0, +\infty)$ 和 $\left[-\frac{1}{3}, 0\right)$ 上分别研究 $g(x)$
 的性质，得到 $g(x) \geq 0$ 在 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 上恒成立，进而证得
 结果.

则 $g'(x) = e^x - \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3}$ (提示：研究比较复杂的导数的符
 号，可尝试用 0 来划分定义域，进行分类讨论)，

当 $x \in [0, +\infty)$ 时， $g'(x) = e^x - \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3} \geq 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增， $\therefore g(x) \geq g(0) = 1 - 1 = 0$.

..... 6分

当 $x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right)$ 时，令 $m(x) = g'(x) \left(x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right)\right)$,

则 $m'(x) = e^x + \frac{2}{3}\sin x \geq e^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}\sin \frac{1}{3} > e^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}$, $\therefore \frac{1}{e} >$

$\left(\frac{2}{3}\right)^3$ (提示： $3^3 > 2^3 \cdot e$), $\therefore e^{-\frac{1}{3}} > \frac{2}{3}$, $\therefore m'(x) > 0$,

$\therefore g'(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{3}, 0\right)$ 上单调递增，

$\therefore g'(x) < g'(0) = e^0 - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{3}, 0\right)$ 上单调递减， $\therefore g(x) > g(0) = 0$.

综上， $g(x) \geq 0$ 在 $\left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 上恒成立.

故当 $x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 时， $f(x) \geq \frac{x}{3} + 1$ 8分

(3)【解】第一步：讨论 $\alpha > \frac{1}{3}$ 时的情况，证明 $f(x) < 1 + \frac{1}{3}x +$
 $2x^2 (x \in (0, 1])$.

当 $\alpha > \frac{1}{3}$ 时，设 $\alpha = \frac{1}{3} + \varepsilon (\varepsilon > 0)$ ，设 $h(x) = e^x - \frac{2}{3}\sin x - 1 -$

$\frac{1}{3}x - 2x^2, x \in (0, 1]$ ，则 $h'(x) = e^x - \frac{2}{3}\cos x - \frac{1}{3} - 4x$ ，令

$n(x) = h'(x)$ ，则 $n'(x) = e^x + \frac{2}{3}\sin x - 4$ ，当 $x \in (0, 1]$ 时，

$n'(x) < e + \frac{2}{3} - 4 < 3 + 1 - 4 = 0$ ， $\therefore h'(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减，

$h'(x) < h'(0) = 0$ ，

$\therefore h(x)$ 在 $(0, 1]$ 上单调递减， $h(x) < h(0) = 0$ ， $\therefore$ 当 $x \in (0,$

$1]$ 时， $f(x) < 1 + \frac{1}{3}x + 2x^2$ 10分

第二步：证明 $\ln(x+1) \leq x$.

设 $u(x) = \ln(x+1) - x$ ，则 $u'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x}$ ，



当 $x \in (-1, 0)$ 时, $u'(x) > 0$, $u(x)$ 单调递增;

当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $u'(x) < 0$, $u(x)$ 单调递减,

$\therefore u(x) \leq u(0)$, 即 $\ln(x+1) - x \leq \ln 1 - 0 = 0$, 即 $\ln(x+1) \leq x$,

当且仅当 $x=0$ 时取等号. 11 分

第三步: 根据证明的不等式进行放缩, 发现 $\alpha > \frac{1}{3}$ 不满足题意.

$\therefore$ 当 $x \in (0, 1]$ 时, $\ln f(x) < \ln\left(1 + \frac{1}{3}x + 2x^2\right) < \frac{1}{3}x + 2x^2$.

再令 $x = -\frac{1}{k}$ ($k > 1$), $\ln\left(1 - \frac{1}{k}\right) < -\frac{1}{k}$, 即 $\frac{1}{k} < \ln k - \ln(k-1)$,

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \sum_{k=2}^n [\ln k - \ln(k-1)]$,

$\therefore$ 当 $n \geq 2$ 时, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \ln n$.

综上, 当 $n \geq 2$ 时, $\ln\left[f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{4}\right)\cdots f\left(\frac{1}{n}\right)\right] <$

$\frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, 又当 $n \geq 2$ 时, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} < 1 +$

$\sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = 2 - \frac{1}{n} < 2$,

$\therefore \ln\left[f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{4}\right)\cdots f\left(\frac{1}{n}\right)\right] < \frac{1}{3}(1 + \ln n) + 2 \times$

$2 = \frac{1}{3} \ln n + \frac{13}{3} < \frac{1}{3} \ln n + 5$.

而 $\alpha \ln(n+1) = \left(\frac{1}{3} + \varepsilon\right) \ln(n+1) > \frac{1}{3} \ln n + \varepsilon \ln(n+1)$,

当 $n > e^{\frac{5}{\varepsilon}}$ 时, $\varepsilon \ln(n+1) > 5$, 则 $\alpha \ln(n+1) > \frac{1}{3} \ln n + 5$, $\therefore \alpha > \frac{1}{3}$

时, 原不等式不恒成立, 故 $\alpha > \frac{1}{3}$ 不满足题意. 13 分

第四步: 讨论 $\alpha \leq \frac{1}{3}$ 时的情况, 证明不等式成立, 得到 α 的最大值.

当 $\alpha \leq \frac{1}{3}$ 时, $(n+1)^\alpha \leq (n+1)^{\frac{1}{3}}$, 则只需证 $(n+1)^{\frac{1}{3}} <$

$f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)\cdots f\left(\frac{1}{n}\right)$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, $\therefore$ 只需证

$\frac{1}{3} \ln(n+1) < \ln\left[f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{3}\right)f\left(\frac{1}{4}\right)\cdots f\left(\frac{1}{n}\right)\right] =$

$\sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{1}{k}\right)$ 14 分

(下面证明 $\sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{1}{k}\right) > \frac{1}{3} \ln(n+1)$)

由(2)知, 当 $x \in \left[-\frac{1}{3}, +\infty\right)$ 时, $f(x) \geq \frac{1}{3}x + 1$ (当且仅当

$x=0$ 时取等号), $\therefore$ 当 $k \in \mathbf{N}^*$ 时, $\ln f\left(\frac{1}{k}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{3k}\right)$, 而

$\ln(n+1) = \sum_{k=1}^n [\ln(k+1) - \ln k]$ (提示: 注意对数运算的灵活运用),

则 $\frac{1}{3} \ln(n+1) = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{3}}$,



$$\text{又} \left(1 + \frac{1}{3k}\right)^3 = 1 + 3 \times \frac{1}{3k} + 3 \times \left(\frac{1}{3k}\right)^2 + \left(\frac{1}{3k}\right)^3 > 1 + \frac{1}{k},$$

$$\therefore \ln f\left(\frac{1}{k}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{3k}\right) > \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{3}},$$

$$\therefore \sum_{k=1}^n \ln f\left(\frac{1}{k}\right) > \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \ln(n+1),$$

$$\therefore \alpha \leq \frac{1}{3} \text{ 符合题意.}$$

综上所述, α 的最大值为 $\frac{1}{3}$ 16 分

题组 2

1. D 命题点 ① 导数的几何意义

【解析】 设切点为 (x_0, y_0) , 因为 $y' = e^x$, 所以曲线 $y = e^x$ 在点 (x_0, y_0) 处的切线方程为 $y - e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0)$. 又因为点 (a, b) 在此切线上, 所以 $b - e^{x_0} = e^{x_0}(a - x_0)$, 整理得 $b = (a - x_0 + 1)e^{x_0}$. 令 $f(x) = (a - x + 1)e^x$, 所以 $f'(x) = (a - x)e^x$, 则当 $x < a$ 时, $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, a)$ 上单调递增; 当 $x > a$ 时, $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上单调递减, 所以函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 处取得最大值 $f(a) = e^a$, 且当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow 0$ (提示: 判断极值点两侧的图象趋势). 因为过点 (a, b) 的切线有两条, 即方程 $b = (a - x_0 + 1)e^{x_0}$ 有两个不相等的实数根, 所以 $0 < b < e^a$, 故选 D.

2. AC 命题点 ② 利用导数研究极值、零点及导数的几何意义

【解析】 $f'(x) = 3x^2 - 1$, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, 故当 $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right), \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ 时, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 时, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f(x)$ 有两个极值点 $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ 与 $\frac{\sqrt{3}}{3}$, 故 A 正确. 又 $f(-2) = -5, f(-1) = 1, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) > 0$, 所以 $f(x)$ 只有一个零点, 故 B 错误. 由 $f(x) + f(-x) = 2$ 可知, 点 $(0, 1)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的对称中心 (另解: $y = x^3 - x$ 的图象关于点 $(0, 0)$ 对称, 将其向上平移一个单位长度可得 $f(x)$ 的图象, 故 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 1)$ 对称), 故 C 正确. 令 $f'(x) = 2$, 得 $x = \pm 1$, 又 $f(1) = 1, f(-1) = 1$, 所以曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, 1)$ 和 $(-1, 1)$ 处的切线方程分别为 $y = 2x - 1$ 和 $y = 2x + 3$, 故 D 错误. 故选 AC.

3. B 必刷考点 ③ 反函数的应用

【解析】 利用原相应函数和反函数图象关于直线 $y = x$ 对称, 且两函数图象都与直线 $y = x$ 相切于点 $(1, 1)$, 巧妙求出 a 的值.

函数 $y = e^{x-1}$ 的反函数为 $y = 1 + \ln x$, 两函数图象关于直线 $y = x$ 对称.

由于 $(e^{x-1})' = e^{x-1}$, 令 $e^{x-1} = 1$, 解得 $x = 1$, 则曲线 $y = e^{x-1}$ 与直线 $y = x$ 相切于点 $(1, 1)$,

同理, $(1 + \ln x)' = \frac{1}{x}$, 令 $\frac{1}{x} = 1$, 解得 $x = 1$, 则曲线 $y = 1 + \ln x$ 与直线 $y = x$ 也相切于点 $(1, 1)$,

于是曲线 $y = e^{x-1}$ 与曲线 $y = 1 + \ln x$ 相切于点 $(1, 1)$, 由选项可



知, $a=1$. 故选 B.

一题多解 把两曲线 $y=e^{x-1}$ 与 $y=a+a\ln x (a>0)$ 有一个公共点, 转化为方程 $e^{x-1}=a(1+\ln x) (a>0)$ 只有一个实数解, 通过分离参数法求出 a 的值.

曲线 $y=e^{x-1}$ 与曲线 $y=a+a\ln x (a>0)$ 只有一个公共点 $\Leftrightarrow$ 方程 $e^{x-1}=a(1+\ln x) (a>0)$ 只有一个实数解,

因为 $a>0, e^{x-1}>0$, 所以 $1+\ln x>0$, 即 $x>\frac{1}{e}$,

分离参数得 $a=\frac{e^{x-1}}{1+\ln x}$, 令 $f(x)=\frac{e^{x-1}}{1+\ln x} \left(x>\frac{1}{e}\right)$,

则 $f'(x)=\frac{e^{x-1}\left(1-\frac{1}{x}+\ln x\right)}{(1+\ln x)^2} \left(x>\frac{1}{e}\right)$,

而 $u(x)=1-\frac{1}{x}+\ln x$ 在 $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ 上单调递增, 且 $u(1)=0$,

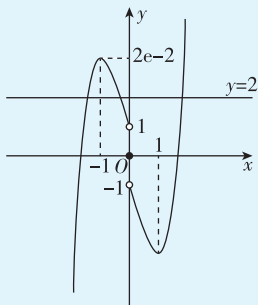
所以当 $x\in\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减; 当 $x\in(1, +\infty)$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增,

当 $x\rightarrow\frac{1}{e}^+$ 时, $f(x)\rightarrow+\infty$; 当 $x\rightarrow+\infty$ 时, $f(x)\rightarrow+\infty$, 所以 $a=f(1)=1$.

4. ABD 命题点 奇函数的性质, 奇函数解析式的求解, 利用导数判断极值

【解析】 因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(0)=0$ (**提示: 若奇函数的定义域中包含 0, 则 $f(0)=0$**), 故 **A** 正确; 当 $x<0$ 时, $-x>0$, 因此 $f(-x)=[(-x)^2-3]e^{-x}+2=-f(x)$, 因此 $f(x)=-(x^2-3)e^{-x}-2$ (**关键: $f(-x)=-f(x)$ 的应用**), 故 **B** 正确; 当 $x>0$ 时, $f(x)=(x^2-3)\cdot e^x+2$, $f'(x)=(x^2+2x-3)e^x=(x+3)(x-1)e^x$, 令 $f'(x)>0$, 得 $x>1$, 令 $f'(x)<0$, 得 $0<x<1$, 因此 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 因此奇函数 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值 (**提示: 奇函数在关于原点对称的区间上单调性相同**), 故 **D** 正确; 当 $x>0$ 时, $f(x)\geq 2$, 即 $(x^2-3)e^x\geq 0$, 解得 $x\geq\sqrt{3}$, 当 $x<0$ 时, $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值, $f(-1)=-(1-3)e-2=2e-2>2$, 因此在 $(-\infty, 0)$ 上也存在满足 $f(x)\geq 2$ 的区间, 故 **C** 错误. 故选 ABD.

快解 对于 C, 结合选项 D 分析可作出 $f(x)$ 的大致图象, 如图所示, 由图可知 C 选项错误.



5. $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$ 命题点 导数与函数的单调性、指数函数与对数函数的单调性

【解析】 由 $f(x)=a^x+(1+a)^x$, 得 $f'(x)=a^x\ln a+(1+a)^x\cdot$



$\ln(1+a)$, 则由题意知不等式 $a^x \ln a + (1+a)^x \ln(1+a) \geq 0$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立 (提示: 可导函数 $f(x)$ 在某一区间上单调, 实际上就是在该区间上 $f'(x) \geq 0$ 恒成立 (单调递增) 或 $f'(x) \leq 0$ 恒成立 (单调递减)). 因为 $a \in (0, 1)$, 所以 $1+a \in (1, 2)$, 则 $\ln(1+a) > 0$, 所以不等式 $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -\left(\frac{1+a}{a}\right)^x$ 对任意 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立. 因为 $1+\frac{1}{a} > 1$, 所以当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $\left(1+\frac{1}{a}\right)^x > 1, -\left(1+\frac{1}{a}\right)^x < -1$, 所以 $\frac{\ln a}{\ln(1+a)} \geq -1$, 即 $\ln a \geq -\ln(1+a)$, 所以 $\ln[a(1+a)] \geq 0$, 所以 $a^2+a-1 \geq 0$, 解得 $a \leq \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ (舍去) 或 $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 又 $a \in (0, 1)$, 所以 a 的取值范围是 $\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$.

一题多解 由题意得 $f'(x) = a^x \ln a + (a+1)^x \ln(a+1)$,

令 $h(x) = f'(x) = a^x \ln a + (a+1)^x \ln(a+1)$,

则 $h'(x) = a^x (\ln a)^2 + (a+1)^x [\ln(a+1)]^2$,

又 $x \in (0, +\infty)$, 此时 $h'(x) > 0$ 恒成立,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

即 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增.

又函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增,

所以 $f'(x) \geq 0$ 在 $(0, +\infty)$ 恒成立,

所以 $f'(0) = \ln a + \ln(a+1) \geq 0$ 即可,

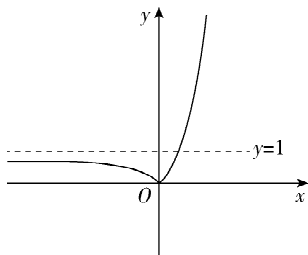
即 $\ln[a(a+1)] \geq 0$, 则 $a(a+1) \geq 1$,

解得 $a \leq \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$,

又 $a \in (0, 1)$, 所以 $a \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, 1\right)$.

6. (0, 1) 命题点 ①利用导数的几何意义求切线方程及取值范围问题

【解析】 画出 $f(x) = |e^x - 1|$ 的图象, 如图所示, 由题意知两条切线的斜率存在且不为零.



当 $x \in (-\infty, 0)$ 时, $f(x) = 1 - e^x$, $f'(x) = -e^x$, 过点 $A(x_1, f(x_1))$ 的切线斜率 $k_1 = f'(x_1) = -e^{x_1}$; 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) = e^x - 1$, $f'(x) = e^x$, 过点 $B(x_2, f(x_2))$ 的切线斜率 $k_2 = f'(x_2) = e^{x_2}$. 因为两条切线互相垂直, 所以 $k_1 k_2 = -1$ (提示: 两直线垂直的应用), 即 $(-e^{x_1}) e^{x_2} = -1$, 即 $e^{x_1+x_2} = 1$, 所以 $x_1 + x_2 = 0$. 过点 $A(x_1, 1 - e^{x_1})$ 的切线方程为 $y - (1 - e^{x_1}) = -e^{x_1}(x - x_1)$, 令 $x = 0$, 则 $M(0, 1 - e^{x_1} + x_1 e^{x_1})$; 过点 $B(x_2, e^{x_2} - 1)$ 的切线方程为 $y - (e^{x_2} - 1) = e^{x_2}(x - x_2)$, 令 $x = 0$, 则 $N(0, e^{x_2} - 1 - x_2 e^{x_2})$, 则 $|AM| =$



$\sqrt{x_1^2+x_1^2e^{2x_1}}$, $|BN| = \sqrt{x_2^2+x_2^2e^{2x_2}} = \sqrt{x_1^2+x_1^2e^{-2x_1}}$, 所以 $\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{\sqrt{x_1^2+x_1^2e^{2x_1}}}{\sqrt{x_1^2+x_1^2e^{-2x_1}}} = \sqrt{\frac{1+e^{2x_1}}{1+e^{-2x_1}}} = e^{x_1}$. 因为 $x_1 < 0$, 所以 $0 < e^{x_1} < 1$, 所以 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是 $(0, 1)$.

一题多解 当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, $f'(x) = e^x$, 所以 $k_{BN} = e^{x_2}$, 同理可得 $k_{AM} = -e^{x_1}$. 因为两条切线互相垂直, 所以 $e^{x_2} \cdot (-e^{x_1}) = -1$, 所以 $x_1 + x_2 = 0$. 所以 $\frac{|AM|}{|BN|} = \frac{\sqrt{1+k_{AM}^2} |0-x_1|}{\sqrt{1+k_{BN}^2} |x_2-0|} = \frac{1}{e^{x_2}}$ (提示: 弦长公式的应用), 因为 $x_2 > 0$, 所以 $0 < \frac{1}{e^{x_2}} < 1$, 即 $\frac{|AM|}{|BN|}$ 的取值范围是 $(0, 1)$.

7. 命题点 ①利用导数判断函数的单调性, 不等式恒成立问题

(1) 【解】 $f(x) = a(x-1) - \ln x + 1, x > 0$,

则 $f'(x) = \frac{ax-1}{x}, x > 0$ 1 分

若 $a \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$ 恒成立, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调递增区间; 3 分

若 $a > 0$, 则当 $0 < x < \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) < 0$, 当 $x > \frac{1}{a}$ 时, $f'(x) > 0$, 所以

$f(x)$ 的单调递减区间为 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$, 单调递增区间为 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$.

..... 5 分

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递减; 当 $a > 0$ 时,

$f(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ 单调递减, 在 $\left(\frac{1}{a}, +\infty\right)$ 单调递增. 6 分

(2) 【证明】因为 $a \leq 2$, 所以当 $x > 1$ 时, $e^{x-1} - f(x) = e^{x-1} - a(x-1) + \ln x - 1 \geq e^{x-1} - 2x + \ln x + 1$ 7 分

令 $g(x) = e^{x-1} - 2x + \ln x + 1, x \geq 1$, 则 $g'(x) = e^{x-1} - 2 + \frac{1}{x}$.

令 $h(x) = g'(x)$, 则 $h'(x) = e^{x-1} - \frac{1}{x^2}$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,

则 $h'(x) \geq h'(1) = 0$ 且等号不恒成立,

所以 $h(x) = g'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $g'(x) \geq g'(1) = 0$ 且等号不恒成立,

故 $g(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $g(x) \geq g(1) = 0$,

所以当 $x > 1$ 时, $e^{x-1} - f(x) \geq e^{x-1} - 2x + \ln x + 1 > 0$ 恒成立,

即 $f(x) < e^{x-1}$ 12 分

8. 命题点 ①利用导数判断函数的单调性, 函数单调性的应用以及零点存在定理

(1) 【解】由题意得 $f'(x) = x(e^x - 2a)$,

当 $a \leq 0$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x > 0$; 令 $f'(x) < 0$, 得 $x < 0$, 1 分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

当 $a > 0$ 时, 令 $f'(x) = 0$, 得 $x = 0$ 或 $x = \ln 2a$, 2 分

①当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < \ln 2a$ 或 $x > 0$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $\ln 2a < x < 0$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a), (0, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(\ln 2a, 0)$



上单调递减. 3分

②当 $a = \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) = x(e^x - 1) \geq 0$ 且等号不恒成立,

所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. 4分

③当 $a > \frac{1}{2}$ 时, 令 $f'(x) > 0$, 得 $x < 0$ 或 $x > \ln 2a$;

令 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \ln 2a$, 5分

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, \ln 2a)$ 上单调递减. 6分

(2)【证明】选择条件①, 证明如下:

由(1)知当 $a > \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(\ln 2a, +\infty)$ 上单调递

增, 在 $(0, \ln 2a)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极大值 $f(0)$, 在 $x=\ln 2a$ 处取得极小值 $f(\ln 2a)$,

且 $f(0) = -1+b$, $f(\ln 2a) = (2a - a \ln 2a) \ln 2a + b - 2a$.

由于 $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}$, $b > 2a$, 所以 $f(0) > 0$, $\ln 2a > 0$, $b - 2a > 0$ 8分

令 $g(x) = 2x - x \ln 2x$,

则 $g'(x) = 2 - \ln 2x - 1 = 1 - \ln 2x$,

令 $g'(x) = 0$ 得 $x = \frac{e}{2}$, 当 $\frac{1}{2} < x < \frac{e}{2}$ 时, $g'(x) > 0$,

当 $\frac{e}{2} < x \leq \frac{e^2}{2}$ 时, $g'(x) < 0$,

所以 $g(x)$ 在 $(\frac{1}{2}, \frac{e}{2})$ 上单调递增, 在 $(\frac{e}{2}, \frac{e^2}{2}]$ 上单调递减,

所以 $g(x)$ 在 $x = \frac{e}{2}$ 处取得极大值 $g(\frac{e}{2})$ 10分

由于 $g(\frac{e}{2}) = \frac{e}{2} > 0$, $g(\frac{1}{2}) > 0$, $g(\frac{e^2}{2}) = 0$,

所以 $g(x) \geq 0$ 在 $(\frac{1}{2}, \frac{e^2}{2}]$ 上恒成立,

所以 $f(\ln 2a) > 0$.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x) \rightarrow -\infty$, 所以 $f(x)$ 有一个零点, 得证.

..... 12分

选择条件②, 证明如下:

由(1)知, 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, \ln 2a)$, $(0, +\infty)$ 上单调

递增, 在 $(\ln 2a, 0)$ 上单调递减, 所以 $f(x)$ 在 $x=\ln 2a$ 处取得极大值 $f(\ln 2a)$, 在 $x=0$ 处取得极小值 $f(0)$ 8分

由于 $0 < a < \frac{1}{2}$, $b \leq 2a$, 所以 $f(0) < 0$, $b - 2a \leq 0$, $\ln 2a < 0$,

$-a \ln 2a > 0$, 则 $2a - a \ln 2a > 0$, 所以 $f(\ln 2a) < 0$ 10分

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x) \rightarrow +\infty$, 所以 $f(x)$ 有一个零点, 得证.

..... 12分

9. 命题点 ⑤ 导数的几何意义、函数图象的对称性、由极值点求参数范围问题

【解】(1) $f(x) = \left(\frac{1}{x} + a\right) \ln(x+1)$, $f'(x) = -\frac{\ln(x+1)}{x^2} +$

$\frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x} + a\right)$, 当 $a = -1$ 时, $f(1) = 0$, $f'(1) = -\ln 2$, 故曲线 $y =$

$f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y = -\ln 2(x-1)$, 即

$x \ln 2 + y - \ln 2 = 0$ 3分



(2) 方法一: 设 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = (x+a) \ln \frac{x+1}{x}$, $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, 由题设知对于任意 $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$, 都有 $g(x) = g(2b-x)$ (提示: 函数 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=b$ 对称的充要条件是 $g(x) = g(2b-x)$),

$$\text{又 } g(2b-x) = (2b-x+a) \ln \frac{2b-x+1}{2b-x} = (x-2b-a) \ln \frac{x-2b}{x-2b-1},$$

$$\text{所以 } \begin{cases} -2b-a=a, \\ -2b=1, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-\frac{1}{2}. \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

方法二: 设 $g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$, 则 $g(x) = (x+a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$, $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

若存在 a, b , 使得曲线 $y=g(x)$ 关于直线 $x=b$ 对称, 则 $(-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$ 关于直线 $x=b$ 对称, 所以 $b=-\frac{1}{2}$.

$$\text{由 } g(x) = g(-1-x) \text{ 得 } (x+a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (-1-x+a) \ln \frac{x}{1+x}, \text{ 整}$$

$$\text{理得 } (x+a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = (x+1-a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

所以 $a=\frac{1}{2}$, 故存在 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$, 使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$\text{方法三: 令 } g(x) = f\left(\frac{1}{x}\right), \text{ 则 } g(x) = (x+a) \ln\left(1+\frac{1}{x}\right),$$

由题意函数 $y=g(x+b)$ 为偶函数,

题眼

$$\text{即 } g(x+b) = (x+b+a) \ln \frac{x+b+1}{x+b} \text{ 为偶函数,}$$

$$\text{所以 } \begin{cases} b+a=0, \\ b+1+b=0, \end{cases} \text{ 即 } \begin{cases} a=\frac{1}{2}, \\ b=-\frac{1}{2}, \end{cases}$$

所以存在 $a=\frac{1}{2}, b=-\frac{1}{2}$, 使得曲线 $y=f\left(\frac{1}{x}\right)$ 关于直线 $x=b$ 对称. $\dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

$$(3) f'(x) = -\frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x+1} \left(\frac{1}{x} + a \right) = \frac{-\ln(x+1) + \frac{ax^2+x}{x+1}}{x^2},$$

$$\text{设 } h(x) = -\ln(x+1) + \frac{ax^2+x}{x+1}, x \in (0, +\infty), \text{ 则 } h'(x) =$$

$\frac{x(ax+2a-1)}{(x+1)^2}$ (提示: 当原函数求导后不方便判断导函数与 0 的大小时, 常另设函数再次求导判断). $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

① 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $h'(x) > 0$, 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $h(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, 无极值点.

② 当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) < 0$, 函数 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $h(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无极值点. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

③ 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 易得 $h(x)$ 在 $\left(0, \frac{1}{a}-2\right)$ 上单调递减, 在



$\left(\frac{1}{a}-2, +\infty\right)$ 上单调递增,

又当 $x \rightarrow 0$ 时, $h(x) \rightarrow 0$, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $h(x) > 0$,

所以在 $\left(\frac{1}{a}-2, +\infty\right)$ 上存在 x_0 使得 $h(x_0) = 0$,

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h(x) < 0$, 即 $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h(x) > 0$, 即 $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增,

故函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 存在极值点 x_0 .

综上, a 的取值范围为 $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ 12 分

10. 命题点 ①利用导数判断函数的单调性、双变量同构问题、极值点偏移问题

(1) 【解】 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\ln x$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$. 故 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增, 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 4 分

(2) 【证明】**第一步:** 观察到题干等式含有两个变量, 且结构相似, 所以先将题干条件进行等价转换.

由 $b \ln a - a \ln b = a - b$ ($a > 0, b > 0$), 得 $\frac{1}{a} \cdot \left(1 - \ln \frac{1}{a}\right) =$

$\frac{1}{b} \cdot \left(1 - \ln \frac{1}{b}\right)$ ($a > 0, b > 0$) (提示: 等式两边同时除以 ab ,

进行同构变形), 即 $f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right)$. 由 $a \neq b$, 得 $\frac{1}{a} \neq \frac{1}{b}$, 由

(1) 不妨设 $\frac{1}{a} \in (0, 1)$, $\frac{1}{b} \in (1, +\infty)$, 则 $f\left(\frac{1}{a}\right) > 0$, 从而

$f\left(\frac{1}{b}\right) > 0$, 易知 $f(e) = 0$, 则 $\frac{1}{b} \in (1, e)$ 6 分

第二步: 证明左边不等式, 利用对称化构造的方法解决极值点偏移问题.

令 $g(x) = f(2-x) - f(x)$, 则 $g'(x) = \ln(2-x) + \ln x = \ln(2x - x^2) = \ln[1 - (x-1)^2]$, 当 $x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, $g(x) > g(1) = 0$, 从而 $f(2-x) > f(x)$, 所以

$f\left(2 - \frac{1}{a}\right) > f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right)$,

由(1)得, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, 所以 $2 - \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, 即

$2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 9 分

第三步: 证明右边不等式, 构造新函数, 利用导数判断其单调性与最值, 进而证明不等式.

由 $\frac{1}{a} \in (0, 1)$, 可得 $\frac{1}{a} < \frac{1}{a} \left(1 - \ln \frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{b}\right)$, 所

以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < f\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b}$.

令 $h(x) = x + f(x)$, $1 < x < e$, 则 $h'(x) = 1 + f'(x) = 1 - \ln x > 0$, 所以 $h(x)$ 在 $(1, e)$ 上单调递增, 所以当 $1 < x < e$ 时, $h(x) <$

$h(e) = e$, 所以 $\frac{1}{b} + f\left(\frac{1}{b}\right) < e$, 所以 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < f\left(\frac{1}{b}\right) + \frac{1}{b} < e$.

综上, $2 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < e$ 12 分

11. 命题点 ①求切线方程, 根据零点个数求参数的取值范围, 证明与零点有关的不等式



(1)【解】当 $a=1$ 时, $f(x)=x-(\ln x)^2$, 定义域为 $(0, +\infty)$,
 $f'(x)=1-\frac{2\ln x}{x}$. $f'(1)=1$, $f(1)=1$, 则所求的切线方程为 $y-1=x-1$, 即 $x-y=0$ 4 分

(2)①【解】第一步: 分离参数, 构造新函数.

由 $f(x)=0$, 可得 $a=\frac{(\ln x)^2}{x}$, 令 $g(x)=\frac{(\ln x)^2}{x} (x>0)$, $f(x)$

有 3 个零点等价于 $g(x)$ 图象与直线 $y=a$ 有 3 个交点.

第二步: 利用导数研究函数的单调性, 作出函数的大致图象.

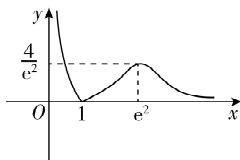
$$g'(x)=\frac{\frac{2\ln x}{x} \cdot x - (\ln x)^2}{x^2} = \frac{\ln x(2-\ln x)}{x^2}. \quad \text{..... 7 分}$$

$x, g'(x), g(x)$ 的变化如表所示:

x	$(0, 1)$	1	$(1, e^2)$	e^2	$(e^2, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	单调递减	0	单调递增	$\frac{4}{e^2}$	单调递减

且 $x \rightarrow 0^+$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow +\infty$ 时, $g(x) \rightarrow 0$.

故 $g(x)$ 大致图象为



第三步: 数形结合, 得出 a 的取值范围.

由图可知 a 的取值范围是 $(0, \frac{4}{e^2})$ 10 分

②【证明】方法一: 第一步: 观察出 x_2, x_3 两根类似极值点偏移, 换元后, 优先考虑处理 $t_2 t_3$.

由①可知, $0 < x_1 < 1, 1 < x_2 < e^2, x_3 > e^2$,

令 $t_1 = \ln x_1 < 0, t_2 = \ln x_2 \in (0, 2), t_3 = \ln x_3 > 2$.

要证 $(\ln x_2 - \ln x_1) \cdot \ln x_3 < \frac{4e}{e-1}$, 即证 $\ln x_2 \cdot \ln x_3 - \ln x_1 \cdot$

$\ln x_3 < \frac{4e}{e-1}$, 即证 $t_2 t_3 - t_1 t_3 < \frac{4e}{e-1}$.

由 $\frac{(\ln x_2)^2}{x_2} = \frac{(\ln x_3)^2}{x_3} = a$, 可得 $2\ln t_2 = \ln a + t_2, 2\ln t_3 = \ln a + t_3$,

两式相减可得 $2(\ln t_3 - \ln t_2) = t_3 - t_2$, 即 $\frac{t_3 - t_2}{\ln t_3 - \ln t_2} = 2$.

第二步: 通过对数均值不等式, 找到 $t_2 t_3$ 的范围, 进一步向要证明的不等式进行转化.

下面证明 $\sqrt{t_2 t_3} < \frac{t_3 - t_2}{\ln t_3 - \ln t_2}$.

即证 $\ln \frac{t_3}{t_2} < \frac{t_3 - t_2}{\sqrt{t_2 t_3}}$, 即证 $\ln \frac{t_3}{t_2} < \sqrt{\frac{t_3}{t_2}} - \sqrt{\frac{t_2}{t_3}}$.

令 $m = \sqrt{\frac{t_3}{t_2}} > 1$, 即证 $2\ln m < m - \frac{1}{m}$.

令 $h(m) = 2\ln m - m + \frac{1}{m} (m > 1)$, 则 $h'(m) = \frac{2}{m} - 1 - \frac{1}{m^2} =$



$$\frac{-m^2+2m-1}{m^2} = \frac{-(m-1)^2}{m^2} < 0.$$

故 $h(m)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $h(m) < h(1) = 0$, 故 $2\ln m < m - \frac{1}{m}$ 得证.

所以 $\sqrt{t_2 t_3} < 2$, 即 $t_2 t_3 < 4$, 即证 $-t_1 t_3 < \frac{4e}{e-1} - 4 = \frac{4}{e-1}$.

第三步: 换元成同一个变量, 构造函数并求出最值, 得证.

因为 $t_1 < 0$, 所以 $0 < e^{t_1} < 1$, 所以 $t_1^2 = a e^{t_1} < a = \frac{t_3^2}{e^{t_3}}$, 故 $-t_1 < \frac{t_3}{e^{\frac{t_3}{2}}}$.

(提示: $t_1 < 0$), 即证 $\frac{t_3^2}{e^{\frac{t_3}{2}}} < \frac{4}{e-1}$.

令 $p(t_3) = \frac{t_3^2}{e^{\frac{t_3}{2}}}$ ($t_3 > 2$), 则 $p'(t_3) = \frac{2t_3 e^{\frac{t_3}{2}} - \frac{1}{2} t_3^2 e^{\frac{t_3}{2}}}{e^{t_3}} = \frac{1}{2} t_3 (4 - t_3)$, 当 $2 < t_3 < 4$ 时, $p'(t_3) > 0$, $p(t_3)$ 单调递增, 当 $t_3 >$

4 时, $p'(t_3) < 0$, $p(t_3)$ 单调递减, 所以 $p(t_3) \leq p(4) = \frac{16}{e^2}$.

即证 $\frac{16}{e^2} < \frac{4}{e-1}$, 即证 $16(e-1) < 4e^2$, 即证 $e^2 - 4e + 4 > 0$,

即证 $(e-2)^2 > 0$, 恒成立, 得证. 16 分

方法二: 即证 $\ln x_2 \cdot \ln x_3 - \ln x_1 \cdot \ln x_3 < \frac{4e}{e-1}$.

由题意及①可知 $\begin{cases} a = \frac{(\ln x_1)^2}{x_1}, \\ a = \frac{(\ln x_2)^2}{x_2}, \text{ 且 } 0 < x_1 < 1, 1 < x_2 < e^2, e^2 < x_3, \\ a = \frac{(\ln x_3)^2}{x_3}, \end{cases}$

则 $\frac{(\ln x_2)^2}{x_2} = \frac{(\ln x_1)^2}{x_1} = \frac{(\ln x_3)^2}{x_3}$.

令 $t_i = \ln x_i$ ($i = 1, 2, 3$), $t_1 < 0$, $0 < t_2 < 2$, $2 < t_3 \Rightarrow \frac{t_3^2}{e^{t_3}} = \frac{t_2^2}{e^{t_2}} \Rightarrow 2\ln t_3 -$

$t_3 = 2\ln t_2 - t_2 \Rightarrow \frac{t_3 - t_2}{\ln t_3 - \ln t_2} = 2$.

由对数均值不等式 $\sqrt{t_2 t_3} < \frac{t_3 - t_2}{\ln t_3 - \ln t_2} = 2$ (提示: 证明过程同上),

得 $t_2 t_3 < 4$,

$\therefore t_2 t_3 - t_1 t_3 < 4 - t_1 t_3$.

$\therefore (-t_1)^2 = a e^{t_1} < a = \frac{t_3^2}{e^{t_3}}, \therefore -t_1 < \frac{t_3}{e^{\frac{t_3}{2}}}, \therefore -t_1 t_3 < \frac{t_3^2}{e^{\frac{t_3}{2}}}$,

$\therefore t_2 t_3 - t_1 t_3 < 4 + \frac{t_3^2}{e^{\frac{t_3}{2}}} = 4 + 4 \cdot \frac{\left(\frac{t_3}{2}\right)^2}{e^{\frac{t_3}{2}}} \leq 4 + 4 \cdot \frac{4}{e^2} = 4 + \frac{16}{e^2}$ (提示:

由①知, 当 $x > 1$ 时, $g(x) \leq g(e^2) = \frac{4}{e^2}$, 由 $t_3 > 2$ 得 $e^{\frac{t_3}{2}} > e$, 则



$$g\left(e^{\frac{t_3}{2}}\right) \leq \frac{4}{e^2}.$$

$$\therefore \frac{16}{e^2} < \frac{4}{e-1} \Leftrightarrow (e-2)^2 > 0, \text{恒成立},$$

$$\therefore t_2 t_3 - t_1 t_3 < 4 + \frac{4}{e-1} = \frac{4e}{e-1}. \quad \dots\dots\dots 16 \text{分}$$

方法三: 设 $a = 4b^2 (b > 0) \Rightarrow 2b\sqrt{x} = 2\ln\sqrt{x}$, 或 $2b\sqrt{x} = -2\ln\sqrt{x}$.

$$\text{设 } \sqrt{x_i} = t_i (i = 1, 2, 3), t_1 < 1 < t_2 < t_3 \Rightarrow \begin{cases} bt_1 + \ln t_1 = 0, \\ bt_2 - \ln t_2 = bt_3 - \ln t_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{即证 } 4(\ln t_2 - \ln t_1) \ln t_3 < \frac{4e}{e-1}. \text{ 设 } \frac{t_3}{t_2} = q > 1, \frac{\ln t_2}{t_2} = \frac{\ln t_3}{t_3} =$$

$$\frac{\ln t_2 + \ln q}{qt_2} \Rightarrow \ln t_2 = \frac{\ln q}{q-1}, \ln t_3 = \frac{q \ln q}{q-1}.$$

$$\text{设 } m(q) = \ln q - \frac{q-1}{\sqrt{q}} (q > 1) \quad \left(\text{提示: 由 } \ln t_2 \ln t_3 = \frac{q(\ln q)^2}{(q-1)^2} < \right.$$

$$\left. 1 \Leftrightarrow \ln q < \frac{q-1}{\sqrt{q}} \text{ 想到} \right).$$

$$\text{则 } m'(q) = \frac{1 - \frac{\sqrt{q}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{q}}}{q} < \frac{1 - 2\sqrt{\frac{\sqrt{q}}{2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{q}}}{q} = 0,$$

则 $m(q)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递减, $m(q) < m(1) = 0$,

$$\text{即 } \ln q < \frac{q-1}{\sqrt{q}}, \text{ 则 } \ln t_2 \ln t_3 = \frac{q(\ln q)^2}{(q-1)^2} < 1. \text{ 又 } -\ln t_1 \ln t_3 = bt_1 \cdot$$

$$bt_3 < b^2 t_3 = \frac{(\ln t_3)^2}{t_3}.$$

$$\text{设 } h(t_3) = \frac{(\ln t_3)^2}{t_3}, \text{ 则 } h'(t_3) = \frac{\ln t_3(2 - \ln t_3)}{t_3^2}, h'(e^2) = 0,$$

$\therefore h(t_3)$ 在 $(1, e^2)$ 上单调递增, 在 $(e^2, +\infty)$ 上单调递减,

$$\therefore h(t_3) \leq h(e^2) = \frac{4}{e^2}.$$

$$\text{下证 } \frac{4}{e^2} < \frac{1}{e-1}: \frac{4}{e^2} < \frac{1}{e-1} \Leftrightarrow e^2 > 4e - 4 \Leftrightarrow (e-2)^2 > 0, \therefore \frac{4}{e^2} < \frac{1}{e-1},$$

$$\therefore (\ln t_2 - \ln t_1) \ln t_3 < 1 + \frac{4}{e^2} < 1 + \frac{1}{e-1} = \frac{e}{e-1},$$

$$\therefore 4(\ln t_2 - \ln t_1) \ln t_3 < \frac{4e}{e-1}, \text{ 即 } (\ln x_2 - \ln x_1) \cdot \ln x_3 < \frac{4e}{e-1}.$$

$\dots\dots\dots 16 \text{分}$

12. 命题点 ② 导数在研究函数的单调性、不等式中的应用

(1) 【解】当 $a = 1$ 时, $f(x) = xe^x - e^x, x \in \mathbf{R}$, 则 $f'(x) = xe^x$,

当 $x > 0$ 时, $f'(x) > 0$, 当 $x < 0$ 时, $f'(x) < 0$,

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减, 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) 【解】函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $f'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x$ (提示: 导函数中含有参数, 要根据参数对导函数取值符号的影响分段讨论).

对于 $x \in (0, +\infty)$, 当 $a \geq 1$ 时, $f'(x) = (1+ax)e^{ax} - e^x > e^{ax} - e^x \geq e^x - e^x = 0, \therefore f'(x) > 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) > -1$, 不满足题意.

当 $a \leq 0$ 时, $f'(x) \leq e^{ax} - e^x \leq 1 - e^x < 0$ 且等号不恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.



$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) < -1$, 满足题意.

当 $0 < a \leq \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) \leq \left(1 + \frac{x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}} - e^x = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{x}{2} - e^{\frac{x}{2}}\right)$ (提示: 当导函数的正负不能直接判断时, 可考虑构造新函数, 通过研究新函数的单调性求出). 6 分

令 $g(x) = 1 + \frac{x}{2} - e^{\frac{x}{2}}$, 则 $g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} < 0$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减,

$\therefore g(x) < g(0) = 0, \therefore f'(x) \leq e^{\frac{x}{2}} \cdot g(x) < 0, f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) < -1$, 满足题意.

当 $\frac{1}{2} < a < 1$ 时, $f'(x) = e^{ax} [1 + ax - e^{(1-a)x}]$.

令 $h(x) = 1 + ax - e^{(1-a)x}$, 则 $h'(x) = a + (a-1)e^{(1-a)x}$.

$\therefore h'(x)$ 为减函数, 7 分

又 $h'(0) = 2a - 1 > 0, x \rightarrow +\infty, h'(x) < 0$,

$\therefore \exists x_0 \in (0, +\infty)$, 使 $h'(x_0) = 0$ (提示: 当导函数的零点存在, 但不易求出时, 可引入虚拟零点),

$\therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) > 0, h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增,

$h(x) > h(0) = 0, \therefore$ 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f'(x) = e^{ax} \cdot h(x) > 0$,

$f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递增. $\therefore f(0) = -1, \therefore f(x) > -1$, 不满足题意.

综上, a 的取值范围是 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ 8 分

(3) 【证明】由 (2) 知当 $a = \frac{1}{2}$, 且 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f(x) < -1$,

即 $xe^{\frac{x}{2}} - e^x < -1, \therefore xe^{\frac{x}{2}} < e^x - 1$.

令 $t = e^x > 1$, 则 $x = \ln t, \therefore \ln t \cdot \sqrt{t} < t - 1$.

令 $t = \frac{i+1}{i} > 1, i \in \mathbf{N}^*$,

则 $\ln \frac{i+1}{i} \sqrt{\frac{i+1}{i}} < \frac{i+1}{i} - 1 = \frac{1}{i}$, 10 分

$\therefore \ln \frac{i+1}{i} < \frac{1}{i} \sqrt{\frac{i}{i+1}} = \sqrt{\frac{1}{i(i+1)}} = \frac{1}{\sqrt{i^2 + i}}$,

$\therefore \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{i^2 + i}} > \sum_{i=1}^n \ln \frac{i+1}{i} = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \cdots + \ln \frac{n+1}{n} =$

$\ln(n+1)$ (提示: 与正整数有关的不等式通常结合放缩法进行证明). 12 分

13. 命题点 ③ 三角函数的最值, 存在、恒成立问题

(1) 【解】第一步: 求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 并化简.

$$f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x$$

$$= 5(\sin 5x - \sin x)$$

$$= 5[\sin(3x+2x) - \sin(3x-2x)]$$

$$= 5 \times 2 \cos 3x \sin 2x$$

$$= 10 \sin 2x \cos 3x. \text{ 2 分}$$

第二步: 判断 $f'(x)$ 的符号并得到 $f(x)$ 的单调性.

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $\sin 2x \geq 0, 3x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$,

当 $3x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, 即 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ 时, $\cos 3x > 0$,



此时 $f'(x) \geq 0$ 且等号不恒成立, 故 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增;

当 $3x \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$, 即 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $\cos 3x < 0$,

此时 $f'(x) < 0$, 故 $f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递减, 4 分

第三步: 根据 $f(x)$ 的单调性得到 $f(x)$ 的最大值.

$\therefore$ 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x)_{\max} = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} = 6\cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$ 5 分

一题多解 第一步: 求 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 并化简.

$f'(x) = -5\sin x + 5\sin 5x = 5(\sin 5x - \sin x) = 5 \times 2\cos 3x \sin 2x = 10\sin 2x \cos 3x$ 2 分

第二步: 计算 $f'(x)$ 的零点.

令 $f'(x) = 0$, 即 $\sin 2x = 0$ 或 $\cos 3x = 0$, 则 $x = \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 或

$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$,

又 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, $\therefore x = 0$ 或 $x = \frac{\pi}{6}$ (提示: 函数在闭区间上的

最值在区间端点或极值点处取得). 3 分

第三步: 计算区间端点值和极值得到最大值.

① 当 $x = 0$ 时, $f(0) = 5\cos 0 - \cos 0 = 4$;

② 当 $x = \frac{\pi}{4}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5\cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{5\pi}{4} = 3\sqrt{2}$;

③ 当 $x = \frac{\pi}{6}$ 时, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5\cos \frac{\pi}{6} - \cos \frac{5\pi}{6} = 6\cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}$,

又 $4 < 3\sqrt{2} < 3\sqrt{3}$, $\therefore$ 当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$ 5 分

(2) 【证明】第一步: 缩小任意值 a 的范围, 设为 $a = 2k\pi + a'$, $a' \in [-\pi, \pi)$.

$\forall a \in \mathbf{R}, \exists k \in \mathbf{Z}$, 使得 $a = 2k\pi + a'$, 其中 $a' \in [-\pi, \pi)$.

..... 6 分

第二步: 对 a' 进一步分范围讨论, 进而比较大小.

当 $a' = 0$ 时, $[a' - \theta, a' + \theta] = [-\theta, \theta]$, 取 $y = 2k\pi + \theta$, 则 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 且 $\cos y = \cos \theta$.

当 $a' \in (0, \pi)$ 时, $a' - \theta \in (-\theta, \pi - \theta)$, $a' + \theta \in (\theta, \pi + \theta)$,

设 $y_1 = \min\{\pi, a' + \theta\}$, 则 $y_1 \in (\theta, \pi]$,

$\therefore g(x) = \cos x$ 在 $[\theta, y_1]$ 上单调递减, $\therefore \cos y_1 < \cos \theta$,

取 $y = 2k\pi + y_1$, 则 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 且 $\cos y = \cos y_1 < \cos \theta$.

当 $a' \in [-\pi, 0)$ 时, $a' - \theta \in [-\pi - \theta, -\theta)$, $a' + \theta \in [-\pi + \theta, \theta)$,

记 $y_2 = \max\{-\pi, a' - \theta\}$, 则 $y_2 \in [-\pi, -\theta)$,

$\therefore g(x) = \cos x$ 在 $[y_2, -\theta]$ 上单调递增, $\therefore \cos y_2 < \cos(-\theta) = \cos \theta$,

取 $y = 2k\pi + y_2$, 则 $y \in [a - \theta, a + \theta]$, 且 $\cos y = \cos y_2 < \cos \theta$.

..... 9 分

第三步: 得结论.

综上, 存在 $y \in [a - \theta, a + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$ 10 分

**快解** (反证法) 第一步: 提出与结论相反的假设.假设对任意 $y \in [a-\theta, a+\theta]$, 有 $\cos y > \cos \theta$.

第二步: 把假设当结论推矛盾.

由 $\cos y > \cos \theta$, 可得 $y \in (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta), k \in \mathbf{Z}$,则 $[a-\theta, a+\theta] \subseteq (2k\pi - \theta, 2k\pi + \theta), k \in \mathbf{Z}, \dots\dots\dots 6$ 分

$$\therefore \begin{cases} a-\theta > 2k\pi - \theta, \\ a+\theta < 2k\pi + \theta, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \therefore \begin{cases} a > 2k\pi, \\ a < 2k\pi, \end{cases} k \in \mathbf{Z}, \text{无解.}$$

 $\therefore$ 假设不成立. $\dots\dots\dots 8$ 分

第三步: 得结论.

故存在 $y \in [a-\theta, a+\theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta. \dots\dots\dots 10$ 分(3) 【解】第一步: 讨论 $\varphi=0$ 时 b 的最小值.当 $\varphi=0$ 时, $y=5\cos x - \cos 5x$, 记 $f(x)=5\cos x - \cos 5x$, $\therefore y=f(x)$ 是以 2π 为周期的偶函数, $\therefore$ 只需考虑 $x \in [0, \pi]$ 时即可. $\dots\dots\dots 12$ 分由(1)知 $f'(x)=10\sin 2x\cos 3x=20(4\cos^2 x-3) \cdot \cos^2 x \cdot \sin x$, $\dots\dots\dots 13$ 分当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right), x \in \left(\frac{5\pi}{6}, \pi\right]$ 时, $f'(x) \geq 0$ 且不恒为 0, $f(x)$ 单调递增, 当 $x \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ 时, $f'(x) \leq 0$ 且不恒为 0, $f(x)$ 单

调递减,

$$\therefore f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}, f(\pi)=-4, \therefore f(x)_{\max}=3\sqrt{3}, \therefore b \geq 3\sqrt{3}.$$

 $\dots\dots\dots 14$ 分第二步: 讨论 $\varphi \neq 0$ 时 b 的最小值.当 $\varphi \neq 0$ 时, 由(2)知 $\exists y \in \left[\varphi - \frac{5\pi}{6}, \varphi + \frac{5\pi}{6}\right]$, 使得 $\cos y \leq$

$$\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

记 $y=5x_0+\varphi$, 由 $y \in \left[\varphi - \frac{5\pi}{6}, \varphi + \frac{5\pi}{6}\right]$ 知 $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$,

$$\therefore 5\cos x_0 - \cos(5x_0+\varphi) = 5\cos x_0 - \cos y \geq 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}.$$

 $\dots\dots\dots 16$ 分

第三步: 综合以上情况得结论.

 $\therefore b_{\min}=3\sqrt{3}. \dots\dots\dots 17$ 分**一题多解** (3) 由余弦型函数周期性可令 $\varphi \in [0, 2\pi)$.① 当 $\varphi=0$ 时, $5\cos x - \cos(5x+\varphi) = 5\cos x - \cos 5x$,由(1)得, $f(x) = 5\cos x - \cos 5x, x \in \mathbf{R}, f'(x) = 10\sin 2x\cos 3x$,令 $f'(x)=0$, 得 $x=\frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 或 $x=\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$.当 $x=\frac{k\pi}{2} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f\left(\frac{k\pi}{2}\right) = 5\cos \frac{k\pi}{2} - \cos \frac{5k\pi}{2} = 5 \cos \frac{k\pi}{2} -$

$$\cos\left(2k\pi + \frac{k\pi}{2}\right) = 4\cos \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}, \therefore \cos \frac{k\pi}{2} \in \{-1, 0, 1\},$$

$$\therefore f\left(\frac{k\pi}{2}\right)_{\max} = 4; \dots\dots\dots 12$$
 分

当 $x=\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbf{Z})$ 时, $f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) -$



$$\cos\left(\frac{5\pi}{6} + \frac{5k\pi}{3}\right) = 5\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right) - \cos\left(\frac{5\pi}{6} - \frac{k\pi}{3}\right) = 6\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right), k \in \mathbf{Z},$$

当 $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$ 时, 分别有 $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$,
 $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3}$, $f\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -3\sqrt{3}$, $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$, $f\left(\frac{11\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}$,
 $\therefore f\left(\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}\right)_{\max} = 3\sqrt{3} > 4$.

故当 $\varphi=0$ 时, $f(x)_{\max} = 3\sqrt{3}$, 此时 $b \geq 3\sqrt{3}$ 14 分

②当 $\varphi \in (0, 2\pi)$ 时,

令 $g(x) = 5\cos x - \cos(5x + \varphi)$, 取 $x = \frac{\pi - \varphi}{6}$, 则 $x \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$,

$$\text{则 } g(x) = 5\cos \frac{\pi - \varphi}{6} - \cos \frac{5\pi + \varphi}{6} = 6\cos \frac{\pi - \varphi}{6} = 6\cos x >$$

$$6\cos \frac{\pi}{6} = 3\sqrt{3}, \text{ 故 } b > 3\sqrt{3} \left(\text{另解: 由 (2) 得, 取 } \theta = \frac{5\pi}{6}, \text{ 令 } a = \right.$$

φ , 则存在 $y \in [\varphi - \theta, \varphi + \theta]$ 使得 $\cos y \leq \cos \theta$. 设 $x = \frac{y - \varphi}{5}$,

$$\therefore |x| \leq \frac{\theta}{5} = \frac{\pi}{6}, \therefore \cos x \geq \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \therefore 5\cos x - \cos(5x +$$

$$\varphi) = 5\cos x - \cos y \geq 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \cos \frac{5\pi}{6} = 3\sqrt{3} \left. \right).$$

综上所述, b 的最小值为 $3\sqrt{3}$ 17 分

14. 命题点 ①函数的图象, 利用导数研究函数的单调性、极值点、零点

【解】(1) 第一步: 由切线方程求 $f'(-1)$.

根据所给切线方程可知, $f'(-1) = -\frac{4}{e^2}$ 1 分

第二步: 对 $f(x)$ 求导, 用 m, n 表示 $f'(-1)$.

因为 $f(x) = x^2 + mx - 4e^{nx-1}$, 所以 $f'(x) = 2x + m - 4n \cdot e^{nx-1}$, 可得 $f'(-1) = -2 + m - 4ne^{-n-1}$, 2 分

第三步: 求出 m, n 的值.

$$\text{所以 } -2 + m - 4ne^{-n-1} = -\frac{4}{e^2},$$

$$\text{则 } \begin{cases} -2 + m = 0, \\ 4n = 4, \\ -n - 1 = -2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m = 2, \\ n = 1. \end{cases} \text{ 3 分}$$

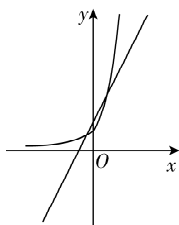
(2) 第一步: 写出 $f(x)$ 及 $f'(x)$.

由 (1) 可知, $f(x) = x^2 + 2x - 4e^{x-1}$, $f'(x) = 2x + 2 - 4e^{x-1}$.

..... 4 分

第二步: 分析 $f'(x)$ 的零点.

令 $f_1(x) = 2x + 2$, $f_2(x) = 4e^{x-1}$, 在同一平面直角坐标系中分别作出 $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ 的图象, 如图所示 (关键: 将导函数的零点问题转化为两个函数图象的交点问题).



$$\text{由 } f'(-1) = -\frac{4}{e^2} < 0, f'(0) = 2 - \frac{4}{e} > 0,$$



$f'(1)=0, f'(2)=6-4e<0$, 结合图象可知 $y=f_1(x)$ 的图象与 $y=f_2(x)$ 的图象有 2 个交点, 设其横坐标分别为 $a, b (a<b)$, 则 $a \in (-1, 0), b=1$ 6 分

第三步: 分别讨论当 $x \rightarrow -\infty$ 和 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f'(x)$ 的情况, 并讨论 $f(x)$ 的单调性.

当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $2x+2 \rightarrow -\infty, 4e^{x-1} \rightarrow 0^+$, 此时 $f'(x) \rightarrow -\infty$;

当 $x \rightarrow +\infty$ 时, $2x+2 \rightarrow +\infty, 4e^{x-1} \rightarrow +\infty$, 而 $y=4e^{x-1}$ 的增长速度大于 $y=2x+2$ 的增长速度, 故 $f'(x) \rightarrow -\infty$.

当 $x \in (-\infty, a)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减;

当 $x \in (a, 1)$ 时, $f'(x) > 0, f(x)$ 单调递增;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0, f(x)$ 单调递减. 7 分

第四步: 判断 $f(x)$ 的极值点个数.

所以 $f(x)$ 在 $x=a$ 处取得极小值, 在 $x=1$ 处取得极大值, 故 $f(x)$ 的极值点个数为 2. 8 分

(3) 第一步: 构造函数并求导.

令 $g(x)=f(x)-kx+1=x^2+(2-k)x-4e^{x-1}+1$, 则 $g'(x)=2x+2-k-4e^{x-1}$, 直线 $y=kx-1 (k>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数即为 $g(x)$ 的零点个数.

第二步: 进一步构造函数, 将 $g'(x)$ 与 0 的大小关系问题转化为两个更简单的函数图象的相交情况问题.

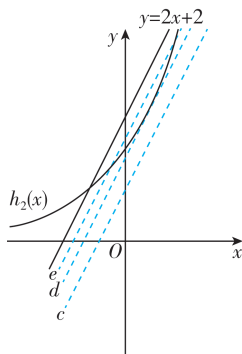
令 $h_1(x)=2x+2-k, h_2(x)=4e^{x-1}$. 由 (2) 可知, $y=h_1(x)$ 的图象与 $y=h_2(x)$ 的图象的交点个数可以是 0, 1 或 2 (提示: (2) 对应 $k=0$ 的特殊情况, 上、下移动 $y=f_1(x)$ 的图象, 即可知 $y=h_1(x)$ 与 $y=h_2(x)$ 图象的交点个数). 9 分

第三步: 求出当 $y=h_1(x)$ 的图象与 $y=h_2(x)$ 的图象恰有 1 个交点时 k 的取值.

当 $y=h_1(x)$ 的图象与 $y=h_2(x)$ 的图象恰有 1 个交点时, 直线 $y=h_1(x)$ 为曲线 $y=h_2(x)$ 的切线, 此时切点的横坐标 x 满足 $h_2'(x)=2$, 即 $4e^{x-1}=2$, 解得 $x=1-\ln 2$, 代入 $h_2(x)$, 得 $h_2(1-\ln 2)=4e^{1-\ln 2-1}=2$, 所以 $h_1(x)$ 与 $h_2(x)$ 图象的切点坐标为 $(1-\ln 2, 2)$, 将其代入 $h_1(x)$, 得 $h_1(1-\ln 2)=2(1-\ln 2)+2-k=2$, 故 $k=2-2\ln 2$ 10 分

第四步: 根据 k 与 $2-2\ln 2$ 的大小关系分类讨论.

(i) 当 $k \in (2-2\ln 2, +\infty)$ 时, 如图①直线 c , 易知 $y=h_1(x)$ 的图象与 $y=h_2(x)$ 的图象没有交点, $g'(x)=2x+2-k-4e^{x-1}=h_1(x)-h_2(x)<0$, 所以 $g(x)$ 单调递减, 当 $x \rightarrow -\infty$ 时, $g(x) \rightarrow +\infty$. 又 $g(0)=1-\frac{4}{e}<0$, 故存在唯一的 $x_1 \in (-\infty, 0)$, 使得 $g(x_1)=0$. 此时直线 $y=kx-1 (k>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数为 1. 11 分



图①

(ii) 当 $k=2-2\ln 2$ 时, 如图①直线 $d, y=h_1(x)$ 的图象与 $y=h_2(x)$ 的图象仅有 1 个交点, $g'(x)=2x+2-k-4e^{x-1}=h_1(x)-h_2(x)\leq 0$, 当且仅当 $x=1-\ln 2$ 时等号成立.

所以当 $x\in\mathbf{R}$ 时, $g'(x)\leq 0$, $g(x)$ 单调递减.

又当 $x\rightarrow-\infty$ 时, $g(x)\rightarrow+\infty$, $g(0)=-\frac{4}{e}+1<0$, 同理, 函数

$g(x)$ 有 1 个零点. 此时直线 $y=kx-1 (k>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数为 1. 12 分

(iii) 当 $k\in(0, 2-2\ln 2)$ 时, 如图①直线 $e, y=h_1(x)$ 的图象与 $y=h_2(x)$ 的图象有 2 个交点, 设这 2 个交点的横坐标分别为 $x_2, x_3 (x_2<x_3)$. 由(2)可知, x_2, x_3 还进一步满足 $-1<a<x_2<1-\ln 2<x_3<1$.

当 $x\in(-\infty, x_2)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减;

当 $x\in(x_2, x_3)$ 时, $g'(x)>0$, $g(x)$ 单调递增;

当 $x\in(x_3, +\infty)$ 时, $g'(x)<0$, $g(x)$ 单调递减.

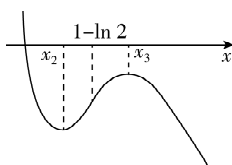
故 $g(x)$ 在 $x=x_2$ 处取得极小值, 在 $x=x_3$ 处取得极大值.

又 $g(1-\ln 2)=(1-\ln 2)^2+(2-k)(1-\ln 2)-1>(1-\ln 2)^2+(1-\ln 2)\cdot 2\ln 2-1=-(\ln 2)^2<0$, 所以 $g(x_2)<0$, 由 $g'(x_3)=0$

可得 $2x_3+2-k-4e^{x_3-1}=0$, 解得 $k=2x_3+2-4e^{x_3-1}$, 则 $g(x_3)=$

$x_3^2+(2-k)x_3-4e^{x_3-1}+1=x_3^2+(-2x_3+4e^{x_3-1})\cdot x_3-4e^{x_3-1}+1=-x_3^2+4e^{x_3-1}(x_3-1)+1=(x_3-1)(4e^{x_3-1}-x_3-1)$, 因为 $1-\ln 2<x_3<1$, 所以 $x_3-1<0$. 令 $\varphi(x)=4e^{x-1}-x-1, x>0$, 则 $\varphi'(x)=$

$4e^{x-1}-1$, 又 $x>0$, 所以 $\varphi'(x)>\frac{4}{e}-1>0$, 所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 则 $\varphi(x_3)>\varphi(1-\ln 2)=\ln 2>0$, 所以 $g(x_3)<0$, 当 $x\rightarrow-\infty$ 时, $g(x)\rightarrow+\infty$, 故 $g(x)$ 的大致图象如图②所示, 故函数 $g(x)$ 有 1 个零点,



图②

此时直线 $y=kx-1 (k>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数为 1.

..... 14 分

第五步: 得出结论.

综上所述, 当 $k>0$ 时, 直线 $y=kx-1 (k>0)$ 与曲线 $y=f(x)$ 的交点个数为 1. 15 分